

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL MÉTODO SIMPLEX

Este material proporciona la motivación geométrica del Método Simplex. En un ejemplo concreto se plantea una iteración del algoritmo Simplex (elección de la variable que entra en la base y la que sale) y se muestra visualmente su interpretación gráfica de la siguiente forma: partiendo de una solución inicial (esto es, un punto extremo de la región factible) se consideran los posibles movimientos a través de las aristas de la región factible, seleccionando en primer lugar cuales de ellos conducen a una mejora de la función objetivo y, posteriormente, seleccionando la que produce la mayor mejora.

AUTORAS: M.J. García-Ligero Ramírez y P. Román Román
Departamento de Estadística e I.O. Universidad de Granada

Interpretación geométrica del método Simplex

$\text{Máx } Z=2x_1+x_2$
 s. a. $x_1+2x_2 \leq 6$
 $x_1-x_2 \leq 4$
 $x_2 \leq 2$
 $x_1, x_2 \geq 0$

$\text{Máx } Z=2x_1+x_2+0s_1+0s_2+0s_3$
 s. a. $x_1+2x_2+s_1=6$
 $x_1-x_2+s_2=4$
 $x_2+s_3=2$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

ALGORITMO SIMPLEX

c_j	2	1	0	0	0	0	
c_B	0	0	0	0	0	0	0
x_B	1	2	1	0	0	6	0
x_1	1	-1	0	1	0	4	0
x_2	0	1	0	0	1	2	0
$Z-c_j$	-2	-1	0	0	0	0	0

Solución $(x_1, x_2) = (0,0)$
 Variables no básicas x_1, x_2
 Variables básicas s_1, s_2, s_3

✓ Solución inicial = Punto extremo de partida $(x_1, x_2) = (0,0)$
 ✓ Búsqueda del punto extremo adyacente que proporcione la mayor mejora en la función objetivo

Posibles direcciones de movimiento

Direcciones de mejora

Una dirección d produce una mejora en la función objetivo si forma con su gradiente un ángulo agudo, es decir si $\cos(d, \bar{c}) > 0$ o, equivalentemente, $d \cdot \bar{c} > 0$

ITERACIÓN DEL SIMPLEX
 $\exists Z_j - c_j < 0$
 Sale de la base s_2
 Entra en la base x_1

c_j	2	1	0	0	0	0	
c_B	0	3	1	0	0	2	0
x_B	1	-1	0	1	0	4	0
x_1	1	-1	0	1	0	4	0
x_2	0	1	0	0	1	2	0
$Z-c_j$	0	-3	0	2	0	2	0

Solución $(x_1, x_2) = (4,0)$
 Variables no básicas x_2, s_2
 Variables básicas x_1, s_1, s_3

$d_1 = (1,0)$ $d_1 \cdot \bar{c}^T = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$
 $d_2 = (0,1)$ $d_2 \cdot \bar{c}^T = (0,1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

Obtención de las direcciones que producen una mejora de la función objetivo

AUTORAS: M.J. García-Ligero Ramírez y P. Román Román
Departamento de Estadística e I.O. Universidad de Granada

Interpretación geométrica del método Simplex

$\text{Máx } Z=2x_1+x_2$
 s. a. $x_1+2x_2 \leq 6$
 $x_1-x_2 \leq 4$
 $x_2 \leq 2$
 $x_1, x_2 \geq 0$

$\text{Máx } Z=2x_1+x_2+0s_1+0s_2+0s_3$
 s. a. $x_1+2x_2+s_1=6$
 $x_1-x_2+s_2=4$
 $x_2+s_3=2$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

ALGORITMO SIMPLEX

c_j	2	1	0	0	0	0	
c_B	0	1	2	1	0	0	6
x_B	1	-1	0	1	0	4	0
x_1	1	-1	0	1	0	4	0
x_2	0	1	0	0	1	2	0
$Z-c_j$	-2	-1	0	0	0	2	0

Solución $(x_1, x_2) = (0,0)$
 Variables no básicas x_1, x_2
 Variables básicas s_1, s_2, s_3

✓ Solución inicial = Punto extremo de partida $(x_1, x_2) = (0,0)$
 ✓ Búsqueda del punto extremo adyacente que proporcione la mayor mejora en la función objetivo

Posibles direcciones de movimiento

Direcciones de mejora $\rightarrow d_1 = (1,0), \cos(d_1, \bar{c}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$
 $\rightarrow d_2 = (0,1), \cos(d_2, \bar{c}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Dirección óptima de mejora

La dirección d que produce la mayor mejora es aquella para la cual $\cos(d, \bar{c})$ es mayor

ITERACIÓN DEL SIMPLEX
 $\exists Z_j - c_j < 0$
 Sale de la base s_2
 Entra en la base x_1

c_j	2	1	0	0	0	0	
c_B	0	3	1	0	0	2	0
x_B	1	-1	0	1	0	4	0
x_1	1	-1	0	1	0	4	0
x_2	0	1	0	0	1	2	0
$Z-c_j$	0	-3	0	2	0	2	0

Solución $(x_1, x_2) = (4,0)$
 Variables no básicas x_2, s_2
 Variables básicas x_1, s_1, s_3

Obtención de la dirección que produce la mayor mejora de la función objetivo

A continuación mostrando dicho movimiento desde el punto extremo de partida se deducen sus consecuencias: cambio de las variables básicas (y, por tanto, obtención de una nueva solución que, en este caso, mejora a la anterior) por el abandono de uno de los hiperplanos que confluyen en el punto extremo de partida y por el bloqueo de un hiperplano que evita el escape de la región factible. La variable definitoria del hiperplano abandonado será la variable que entra en la base y la variable de bloqueo la que sale. De esta forma, el alumno adquiere, de forma intuitiva, el mecanismo de funcionamiento del método Simplex.



Interpretación geométrica del método Simplex

Max $Z = 2x_1 + x_2$
 s. a. $x_1 + 2x_2 \leq 6$
 $x_1 - x_2 \leq 4$
 $x_2 \leq 2$
 $x_1, x_2 \geq 0$

Max $Z = 2x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$
 s. a. $x_1 + 2x_2 + s_1 = 6$
 $x_1 - x_2 + s_2 = 4$
 $x_2 + s_3 = 2$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

ALGORITMO SIMPLEX

c_j	2	1	0	0	0
c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
0	1	2	1	0	0
0	1	-1	0	1	0
0	0	1	0	0	1
Z_{max}	-2	-1	0	0	0

ITERACIÓN DEL SIMPLEX

c_j	2	1	0	0	0
c_B	s_1	s_2	s_3	x_1	x_2
0	0	3	1	0	0
2	1	-1	0	1	0
0	1	0	0	1	2
Z_{max}	0	-3	0	2	0

✓ Solución inicial = Punto extremo de partida $(x_1, x_2) = (0, 0)$
 ✓ Búsqueda del punto extremo adyacente que proporcione la mayor mejora en la función objetivo

Posibles direcciones de movimiento
 Direcciones de mejora $\rightarrow d_1 = (1, 0), \cos(d_1, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$
 $d_2 = (0, 1), \cos(d_2, \vec{c}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Dirección óptima de mejora
 Abandono del hiperplano $x_1 = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} x_1 > 0 \\ \text{Entra en la base } x_1 \end{array} \right.$
 Bloqueo del hiperplano $s_2 = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} s_2 = 0 \\ \text{Deja la base } s_2 \end{array} \right.$

Interpretación intuitiva de una iteración del método Simplex