Ejemplo de Programación Paramétrica

Variación de los recursos: En el ejemplo de las cervezas supongamos que cambian ambos recursos. Concretamente, se sabe que el vector de variaciones es $b^0 = (-1, -2)$. Determinar las soluciones del problema lineal para cualquier $t \in \mathbb{R}$.

El problema que queremos resolver es,

$$\begin{aligned} MaxZ &= 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ s.a.\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 30 - t \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 45 - 2t \end{aligned}$$

En primer lugar determinamos la tabla óptima para $t = 0$ o equivalentemente la tabla óptima del problema original.

TABLA ÓPTIMA

	c_j	4	7	3	0	0	
$\mathbf{c}_B$	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	$\mathbf{x}_B$
4	x_1	1	0	2/3	2/3	−1/3	5
7	x_2	0	1	2/3	−1/3	2/3	20
	$z_j - c_j$	0	0	13/3	1/3	10/3	$Z = 160$

Se incluye en la tabla la columna con x_B^0 y Z^0,

$$x_B^0 = B^{-1}b^0 = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

	c_j	4	7	3	0	0		
$\mathbf{c}_B$	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x_B^0}$
4	x_1	1	0	2/3	2/3	−1/3	5	0
7	x_2	0	1	2/3	−1/3	2/3	20	−1
	$z_j - c_j$	0	0	13/3	1/3	10/3	$Z = 160$	$Z^0 = -7$

Ahora, se calcula $\widehat{x}_B(t)$ y se impone que sea factible

$$\widehat{x}_B(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 - t \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad t \leq 20$$

Así, para $t \in (-\infty, 20)$, la solución óptima es $(5, 20 - t, 0, 0, 0)$ con $Z^* = 160 - 7t$.

Estudiamos ahora el caso $t = 20$.

$\mathbf{t = 20}$. La variable x_2 es degenerada y aplicamos el algoritmo del simplex dual para determinar la nueva solución. Sale x_2 y entra s_1.

	c_j	4	7	3	0	0		
$\mathbf{c}_B$	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x_B^0}$
4	x_1	1	2	2	0	1	45	-2
0	s_1	0	-3	-2	1	-2	-60	3
	$z_j - c_j$	0	1	5	0	4	$Z = 180$	$Z^0 = -8$

Se impone factibilidad

$$\widehat{x}_B(t) = \begin{pmatrix} 45 - 2t \\ -60 + 3t \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t \leq 45/2 \\ t \geq 60/3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 20 \leq t \leq 45/2.$$

Así, para $20 \leq t \leq 45/2$, la solución óptima es $(45-2t, 0, 0, -60+3t, 0)$ con $Z^* = 180-8t$.

Estudiamos ahora a partir de esta última tabla el caso $t = 45/2$.

$\mathbf{t = 45/2}$. x_1 pasa a ser degenerada y aplicamos el simplex dual. Pero observamos que no puede entrar ninguna variable a formar parte de la base ya que todos los y_{k1} son positivos. Por tanto, el dual es no acotado y el primal es infactible.

En resumen,

Recorrido t	Solución óptima	Valor del objetivo
$(-\infty, 20)$	$(5, 20 - t, 0, 0, 0)$	$160 - 7t$
$(20, 45/2)$	$(45 - 2t, 0, 0, -60 + 3t, 0)$	$180 - 8t$
$(45/2, +\infty)$	Infactible	