

RESOLUCIÓN INTERACTIVA DEL SIMPLEX

Estos materiales interactivos presentan la resolución interactiva de ejemplos concretos de un problema de P.L. mediante el método Simplex. Se presentan tres situaciones: problema con solución óptima única, con solución no acotada y con óptimos alternativos.

Así, partiendo de la tabla inicial para dicho problema la primera cuestión que se plantea al alumno es si la solución básica factible inicial es óptima, ante la cual puede seleccionar dos opciones: si el alumno cree que es capaz de responder a esta pregunta debe elegir el botón *Continuar y comprobar*; si no sabe, debe seleccionar el botón *Necesito ayuda*.

AUTORAS: M.J. García-Ligero Ramírez y P. Román Román
Departamento de Estadística e I.O. Universidad de Granada

Resolución interactiva del Simplex

C_j		4	7	3	0	0	
C_B	Variables básicas	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	X_B
0	S_1	2	1	2	1	0	30
0	S_2	1	2	2	0	1	45

¿La solución obtenida es óptima?

Opciones para comprobar si una solución obtenida es óptima en la aplicación del método Simplex

Si el alumno selecciona la opción *Continuar y comprobar*, se le suministra la solución, sin detalles, a la pregunta propuesta, pudiendo optar por la opción *Volver* si comprueba que su opción no era la adecuada y debe seleccionar el botón *Necesito ayuda*.



Resolución interactiva del Simplex

		c_j	4	7	3	0	0	
c_{B_i}	Variables básicas	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_{B_i}	
0	s_1	2	1	2	1	0	30	
0	s_2	1	2	2	0	1	45	
	Z_j	0	0	0	0	0	0	
	$Z_j - c_j$	-4	-7	-3	0	0		

AUTORAS: M.J. García-Ligero Ramírez y P. Román Román
 Departamento de Estadística e I.O. Universidad de Granada

Para que la solución sea óptima se debe verificar que todos los elementos $Z_j - c_j$ sean mayores o iguales que cero. Dado que dicha condición no se cumple, la solución $s_1 = 30, s_2 = 45$ no es óptima.

Determina la variable que sale de la base y la que entra

Continuar y comprobar
Necesito ayuda
Volver

Explicación obtenida al seleccionar la opción *Continuar y comprobar* en la pantalla mostrada en la figura anterior

Si por el contrario selecciona *Necesito ayuda*, se le explica de forma detallada y con animaciones cómo realizar los cálculos necesarios y comprobar las condiciones necesarias para llegar a la respuesta adecuada.

Resolución interactiva del Simplex

		c_j	4	7	3	0	0	
c_{B_i}	Variables básicas	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_{B_i}	
0	s_1	2	1	2	1	0	30	
0	s_2	1	2	2	0	1	45	
	Z_j	0	0	0	0	0	0	

AUTORAS: M.J. García-Ligero Ramírez y P. Román Román
 Departamento de Estadística e I.O. Universidad de Granada

Para ello, incluimos en la tabla dos nuevas filas. En la primera

$$z_j = \sum_i a_{ij} c_{B_i}$$

$i = 2 \quad j = 5$

$$z_1 = a_{11} c_{B_1} + a_{21} c_{B_2} = 2 \times 0 + 1 \times 0 = 0$$

$$z_2 = a_{12} c_{B_1} + a_{22} c_{B_2} = 1 \times 0 + 2 \times 0 = 0$$

$$z_3 = a_{13} c_{B_1} + a_{23} c_{B_2} = 2 \times 0 + 2 \times 0 = 0$$

Obtención de la fila indicadora z_j

Resolución interactiva del Simplex

		c_j	4	7	3	0	0	
c_{B_i}	Variables básicas	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_{B_i}	
0	s_1	2	1	2	1	0	30	
0	s_2	1	2	2	0	1	45	
	Z_j	0	0	0	0	0	0	

AUTORAS: M.J. García-Ligero Ramírez y P. Román Román
 Departamento de Estadística e I.O. Universidad de Granada

Para ello, incluimos en la tabla dos nuevas filas. En la primera

$$z_j = \sum_i a_{ij} c_{B_i}$$

Calculamos, de la misma forma el valor de la función objetivo con la solución actual.

$i = 2 \quad j = 5$

$$z_1 = a_{11} c_{B_1} + a_{21} c_{B_2} = 2 \times 0 + 1 \times 0 = 0$$

$$z_2 = a_{12} c_{B_1} + a_{22} c_{B_2} = 1 \times 0 + 2 \times 0 = 0$$

$$z_3 = a_{13} c_{B_1} + a_{23} c_{B_2} = 2 \times 0 + 2 \times 0 = 0$$

$$z_4 = a_{14} c_{B_1} + a_{24} c_{B_2} = 1 \times 0 + 0 \times 0 = 0$$

$$z_5 = a_{15} c_{B_1} + a_{25} c_{B_2} = 0 \times 0 + 1 \times 0 = 0$$

Obtención del valor de la función objetivo con la solución actual



Resolución interactiva del Simplex

		c_j	4	7	3	0	0	
c_{B_i}	Variables básicas	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_{B_i}	
0	s_1	2	1	2	1	0	30	
0	s_2	1	2	2	0	1	45	
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0
	$Z_j - c_j$	-4	-7	-3	0	0		

Para ello, incluimos en la tabla dos nuevas filas. En la primera

$$Z_j = \sum_i a_{ij} c_{B_i}$$

Calculamos, de la misma forma el valor de la función objetivo con la solución actual.

En la segunda

$$Z_j - c_j$$

Obtención de la fila de costos reducidos

Dado que en este caso, la solución básica factible inicial no es óptima, el siguiente paso que debe realizar el alumno es la búsqueda de una nueva solución básica factible y, para ello, determinar la variable que sale de la base y la que entra. De nuevo al alumno se le plantean las opciones *Continuar y comprobar* y *Necesito ayuda*. A continuación mostramos solamente la explicación detallada y animada correspondiente a la opción *Necesito ayuda*.

Resolución interactiva del Simplex

		c_j	4	7	3	0	0	
c_{B_i}	Variables básicas	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_{B_i}	
0	s_1	2	1	2	1	0	30	
0	s_2	1	2	2	0	1	45	
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0
	$Z_j - c_j$	-4	-7	-3	0	0		

Para ello, incluimos en la tabla dos nuevas filas. En la primera

$$Z_j = \sum_i a_{ij} c_{B_i}$$

Calculamos, de la misma forma el valor de la función objetivo con la solución actual.

En la segunda

$$Z_j - c_j$$

Para que la solución sea óptima se debe verificar que todos los elementos

$$Z_j - c_j$$

sean mayores o iguales que cero.

Dado que dicha condición no se cumple, la solución $s_1 = 30, s_2 = 45$ no es óptima.

Determina la variable que sale de la base y la que entra

Comprobación de la no optimalidad de la solución actual

Resolución interactiva del Simplex

		c_j	4	7	3	0	0	
c_{B_i}	Variables básicas	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_{B_i}	
0	s_1	2	1	2	1	0	30	
0	s_2	1	2	2	0	1	45	
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0
	$Z_j - c_j$	-4	-7	-3	0	0		

VARIABLE QUE ENTRA:
 De entre las variables con valor de $Z_j - c_j$ negativo, entra en la base la que corresponde al valor más negativo.

En este caso la variable

$$x_2$$

Determinación de la variable que entra en la base

Resolución interactiva del Simplex

		c_j	4	7	3	0	0	
c_{B_i}	Variables básicas	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_{B_i}	
0	s_1	2	1	2	1	0	30	
0	s_2	1	2	2	0	1	45	
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0
	$Z_j - c_j$	-4	-7	-3	0	0		

VARIABLE QUE ENTRA:
 De entre las variables con valor de $Z_j - c_j$ negativo, entra en la base la que corresponde al valor más negativo.

En este caso la variable

$$x_2$$

VARIABLE QUE SALE:
 Fijada la variable que entra, se calcula el mínimo de los cocientes entre los valores de las variables básicas y los elementos positivos de la columna correspondiente a la variable que entra en la base.

En este caso

$$\min \left\{ \frac{30}{1}, \frac{45}{2} \right\} = \frac{45}{2}$$

y, por tanto, la variable que sale es

$$s_2$$

Calcula los valores de la siguiente tabla del simplex

Determinación de la variable que sale de la base

Una vez determinadas tanto la variable que entra como la que sale de la base, el siguiente paso para la resolución del problema planteado es la obtención de la nueva tabla del Simplex asociada a las nuevas variables básicas (cambio de base en una iteración del método Simplex). Al solicitarle al alumno que resuelva esta cuestión de nuevo se le ofrecen las posibilidades ya citadas. Mostramos a continuación la explicación detallada y animada asociada a la opción *Necesito ayuda*.

Resolución interactiva del Simplex

		C_j	4	7	3	0	0	
C_B	Variables básicas	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	X_B	
0	S_1	2	1	2	1	0	30	
0	S_2	1	2	2	0	1	45	
	Z_j	0	0	0	0	0	0	
	$Z_j - C_j$	-4	-7	-3	0	0		
0	S_1							
7	X_2							

PRIMER PASO: Determinación del elemento pivote

Elemento de la tabla correspondiente a la variable que sale de la base y la que entra.

En este caso el elemento marcado, que toma el valor 2.

Obtención del elemento pivote

Resolución interactiva del Simplex

		C_j	4	7	3	0	0	
C_B	Variables básicas	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	X_B	
0	S_1	2	1	2	1	0	30	
0	S_2	1	2	2	0	1	45	$\cdot 1/2$
	Z_j	0	0	0	0	0	0	
	$Z_j - C_j$	-4	-7	-3	0	0		
0	S_1							
7	X_2	1/2	1	1	0	1/2	45/2	$\cdot 2$

SEGUNDO PASO: Cálculo de los elementos de la fila de la nueva variable básica

Los valores de dicha fila se obtienen dividiendo la fila correspondiente en la tabla anterior por el elemento pivote.

Cálculo de los valores de la fila correspondiente a la nueva variable básica

Resolución interactiva del Simplex

		C_j	4	7	3	0	0	
C_B	Variables básicas	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	X_B	
0	S_1	2	1	2	1	0	30	$\cdot 1$
0	S_2	1	2	2	0	1	45	
	Z_j	0	0	0	0	0	0	
	$Z_j - C_j$	-4	-7	-3	0	0		
0	S_1	3/2	0	1	1	-1/2	15/2	$\cdot 1$
7	X_2	1/2	1	1	0	1/2	45/2	$\cdot 1$

TERCER PASO: Cálculo de los elementos del resto de las filas

Fijada la nueva variable básica (en este caso x_2), consideramos su columna asociada en la tabla anterior, y de ella seleccionamos el valor correspondiente a la variable de la nueva fila que queremos calcular.

Queremos calcular la primera fila de la nueva tabla. Por tanto, en nuestro caso el valor seleccionado es 1.

La nueva fila se calcula restando a la misma fila de la tabla anterior la fila de la variable básica en la tabla actual, previamente multiplicada por el valor seleccionado.

Cálculo de los valores de las restantes filas



Finalmente, cuando se le solicita al alumno, en una de las iteraciones del método Simplex, que compruebe si la solución es óptima siendo la respuesta afirmativa, la pantalla que aparece es la que se muestra en la siguiente figura.

Resolución interactiva del Simplex

		C_j	4	7	3	0	0	
C_{B_i}	Variables básicas	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	X_{B_i}	
0	S_1	3/2	0	1	1	-1/2	15/2	
7	X_2	1/2	1	1	0	1/2	45/2	
	Z_j	7/2	7	7	0	7/2	315/2	
	$Z_j - C_j$	-1/2	0	4	0	7/2		
4	X_1	1	0	2/3	2/3	-1/3	5	
7	X_2	0	1	2/3	-1/3	2/3	20	
	Z_j	4	7	22/3	1/3	10/3	160	
	$Z_j - C_j$	0	0	11/3	1/3	10/3		

Para que la solución sea óptima se debe verificar que todos los elementos $Z_j - C_j$ sean mayores o iguales que cero.
 Dado que dicha condición se cumple, la solución $x_1 = 5, x_2 = 20$ es óptima.

Verificación de la optimalidad de una solución de un problema de P. L.

Si la solución es óptima pero hay soluciones alternativas, el desarrollo final de la resolución se muestra en las siguientes figuras (para otros ejemplos).

Resolución interactiva del Simplex

		C_j	6	10	0	0	
C_{B_i}	Variables básicas	X_1	X_2	S_1	S_2	X_{B_i}	
0	S_1	5	2	1	0	10	
0	S_2	3	5	0	1	15	
	Z_j	0	0	0	0	0	
	$Z_j - C_j$	-6	-10	0	0		
0	S_1	19/5	0	1	-2/5	4	
10	X_2	3/5	1	0	1/5	3	
	Z_j	6	10	0	2	30	
	$Z_j - C_j$	0	0	0	2		

Para que la solución sea óptima se debe verificar que todos los elementos $Z_j - C_j$ sean mayores o iguales que cero.
 Dado que dicha condición se cumple, la solución $x_1 = 0, x_2 = 3$ es óptima.
 Pero dado que $Z_j - C_j = 0$, para X_1 , variable no básica, el problema tiene **óptimos alternativos**.

Determina la variable que sale de la base y la que entra

Continuar y comprobar
Necesito ayuda

Comprobación de la optimalidad de la solución actual y advertencia de existencia de óptimos alternativos

Resolución interactiva del Simplex

		C_j	2	1	0	0	
C_{B_i}	Variables básicas	X_1	X_2	S_1	S_2	X_{B_i}	
0	S_1	19/5	0	1	-2/5	4	
10	X_2	3/5	1	0	1/5	3	
	Z_j	6	10	0	2	30	
	$Z_j - C_j$	0	0	0	2		
6	X_1	1	0	5/19	-2/19	20/19	
10	X_2	0	1	-3/19	5/19	45/19	
	Z_j	6	10	0	38/19	30	
	$Z_j - C_j$	0	0	0	38/19		

Para que la solución sea óptima se debe verificar que todos los elementos $Z_j - C_j$ sean mayores o iguales que cero.
 Dado que dicha condición se cumple, la solución $x_1 = 20/19, x_2 = 45/19$ junto con la obtenida anteriormente, también es óptima.
 Además, cualquier combinación lineal convexa de las soluciones obtenidas es también solución óptima.

Obtención de soluciones alternativas



Por último, el caso de un problema con solución no acotada se muestra en las siguientes figuras.

Resolución interactiva del Simplex

		c_j	2	1	0	0	
C_B	Variables básicas	X_1	X_2	S_1	S_2	X_B	
0	X_1	1	-1	1	0	10	
0	S_2	0	2	-2	1	20	
	Z_j	2	-2	2	0	20	
	$Z_j - c_j$	0	-3	2	0		
2	X_1	1	0	0	1/2	20	
1	X_2	0	1	-1	1/2	10	
	Z_j	2	1	-1	3/2	50	
	$Z_j - c_j$	0	0	-1	3/3		

VARIABLE QUE ENTRA:
 De entre las variables con valor de $Z_j - c_j$ negativo, entre en la base la que corresponde al valor más negativo.
 En este caso la variable

S_1

Obtención de la posible variable que entra en la base

Resolución interactiva del Simplex

		c_j	2	1	0	0	
C_B	Variables básicas	X_1	X_2	S_1	S_2	X_B	
0	X_1	1	-1	1	0	10	
0	S_2	0	2	-2	1	20	
	Z_j	2	-2	2	0	20	
	$Z_j - c_j$	0	-3	2	0		
2	X_1	1	0	0	1/2	20	
1	X_2	0	1	-1	1/2	10	
	Z_j	2	1	-1	3/2	50	
	$Z_j - c_j$	0	0	-1	3/3		

VARIABLE QUE ENTRA:
 De entre las variables con valor de $Z_j - c_j$ negativo, entre en la base la que corresponde al valor más negativo.
 En este caso la variable

S_1

VARIABLE QUE SALE:
 Fijada la variable que entra, se calcula el mínimo de los cocientes entre los valores de las variables básicas y los elementos positivos de la columna correspondiente a la variable que entra en la base.
 En este caso, dado que los elementos de la columna correspondiente a dicha variable no son positivos la **solución** al problema es **no acotada**.

Verificación de la condición de solución no acotada