

OBTENCIÓN DE SOLUCIONES BÁSICAS FACTIBLES (RELACIÓN CON PUNTOS EXTREMOS)

Este material interactivo tiene como objetivo que el alumno adquiera los conceptos de solución básica y solución básica factible, así como la relación existente entre éstos y los puntos extremos de la región factible en un problema de Programación Lineal. Para ello, centrándonos en un ejemplo concreto, al alumno se le plantea la posibilidad de seleccionar columnas linealmente independientes de la matriz asociada al problema en forma estándar hasta construir una base; a partir de dicha selección se le explica paso a paso como calcular la solución básica asociada. Además, si las columnas seleccionadas por el alumno no son linealmente independientes, se le explica el motivo de la no existencia de solución básica en ese caso. El procedimiento de selección y el desarrollo que aparece se muestra en las siguientes figuras.

Obtención de soluciones básicas factibles (relación con puntos extremos)

Forma estándar

$\text{Máx } Z=2x_1+x_2$
 s. a. $x_1+2x_2 \leq 6$
 $x_1-x_2 \leq 4$
 $x_2 \leq 2$
 $x_1, x_2 \geq 0$

$\text{Máx } Z=2x_1+x_2+0s_1+0s_2+0s_3$
 s. a. $x_1+2x_2+s_1=6$
 $x_1-x_2+s_2=4$
 $x_2+s_3=2$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Solución básica
 $A^m \times^m = b$ sistema de ecuaciones lineales. $A^m \rightarrow A^m(B|N)$, $B_{\text{invertible}}$ no singular
solución básica: $x^m = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ con $x_0 = B^{-1}b$ y $x_i = 0, \dots, 0$

Número de soluciones básicas
 $m=3, n=5 \rightarrow n^{\circ}$ de soluciones básicas $\leq \binom{5}{3}$

$\text{Máx } Z=c^T x^*$
 s. a. $A^m x^* = b$
 $x^* \geq 0$

$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $c^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Obtención de soluciones básicas (Marca tres columnas y obtendrás la solución básica asociada a ellas, si existe, o bien, selecciona el listado de todas las soluciones básicas)

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Listado de todas las soluciones básicas

Selección de columnas de la matriz asociada a un problema de Programación Lineal en forma estándar

Obtención de soluciones básicas factibles (relación con puntos extremos)

Forma estándar

$\text{Máx } Z=2x_1+x_2$
 s. a. $x_1+2x_2 \leq 6$
 $x_1-x_2 \leq 4$
 $x_2 \leq 2$
 $x_1, x_2 \geq 0$

$\text{Máx } Z=2x_1+x_2+0s_1+0s_2+0s_3$
 s. a. $x_1+2x_2+s_1=6$
 $x_1-x_2+s_2=4$
 $x_2+s_3=2$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Solución básica
 $A^m \times^m = b$ sistema de ecuaciones lineales. $A^m \rightarrow A^m(B|N)$, $B_{\text{invertible}}$ no singular
solución básica: $x^m = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ con $x_0 = B^{-1}b$ y $x_i = 0, \dots, 0$

Número de soluciones básicas
 $m=3, n=5 \rightarrow n^{\circ}$ de soluciones básicas $\leq \binom{5}{3}$

$\text{Máx } Z=c^T x^*$
 s. a. $A^m x^* = b$
 $x^* \geq 0$

$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $c^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Obtención de soluciones básicas (Marca tres columnas y obtendrás la solución básica asociada a ellas, si existe, o bien, selecciona el listado de todas las soluciones básicas)

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$
Solución básica
 $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (14/3, 2/3, 0, 0, 4/3)$

Listado de todas las soluciones básicas

Obtención de una solución básica asociada a una selección concreta de columnas de la matriz asociada a un problema de Programación Lineal en forma estándar

Obtención de soluciones básicas factibles (relación con puntos extremos)

Forma estándar

$\text{Máx } Z=2x_1+x_2$
 s. a. $x_1+2x_2 \leq 6$
 $x_1-x_2 \leq 4$
 $x_2 \leq 2$
 $x_1, x_2 \geq 0$

$\text{Máx } Z=2x_1+x_2+0s_1+0s_2+0s_3$
 s. a. $x_1+2x_2+s_1=6$
 $x_1-x_2+s_2=4$
 $x_2+s_3=2$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Solución básica
 $A^m \times^m = b$ sistema de ecuaciones lineales. $A^m \rightarrow A^m(B|N)$, $B_{\text{invertible}}$ no singular
solución básica: $x^m = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ con $x_0 = B^{-1}b$ y $x_i = 0, \dots, 0$

Número de soluciones básicas
 $m=3, n=5 \rightarrow n^{\circ}$ de soluciones básicas $\leq \binom{5}{3}$

$\text{Máx } Z=c^T x^*$
 s. a. $A^m x^* = b$
 $x^* \geq 0$

$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $c^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Obtención de soluciones básicas (Marca tres columnas y obtendrás la solución básica asociada a ellas, si existe, o bien, selecciona el listado de todas las soluciones básicas)

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \nexists B^{-1} \text{ con } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 No existe solución básica ya que las columnas seleccionadas no constituyen una base

Listado de todas las soluciones básicas

Comprobación de no existencia de solución básica si se seleccionan columnas que no sean linealmente independientes

Una vez que el alumno ha adquirido el concepto de solución básica y asimilado el procedimiento de cálculo, puede solicitar el listado de todas ellas y seleccionar cada una de ellas para comprobar su factibilidad o no y, en caso afirmativo, obtener el punto extremo asociado.



Obtención de soluciones básicas factibles (relación con puntos extremos)

$\text{Máx } Z=2x_1+x_2$
 s. a. $x_1+2x_2 \leq 6$
 $x_1-x_2 \leq 4$
 $x_2 \leq 2$
 $x_1, x_2 \geq 0$

$\text{Máx } Z=2x_1+x_2+0s_1+0s_2+0s_3$
 s. a. $x_1+2x_2+s_1=6$
 $x_1-x_2+s_2=4$
 $x_2+s_3=2$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Variables no básicas	Variables básicas	Solución básica	¿Es factible?	Punto extremo asociado	Valor de Z
x_1, x_2	s_1, s_2, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 6, 4, 2)$			
x_1, s_1	x_2, s_2, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 3, 0, 7, -1)$			
x_1, s_2	x_2, s_1, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, -4, 14, 0, 6)$			
x_1, s_3	x_2, s_1, s_2	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 2, 2, 6, 0)$			
x_2, s_1	x_1, s_2, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (6, 0, 0, -2, 2)$			
x_2, s_2	x_1, s_1, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (4, 0, 2, 0, 2)$			
s_1, s_2	x_1, x_2, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (14/3, 2/3, 0, 0, 4/3)$			
s_1, s_3	x_1, x_2, s_2	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (2, 2, 0, 4, 0)$			
s_2, s_3	x_1, x_2, s_1	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (6, 2, -4, 0, 0)$			

Fecha en cualquier solución básica para comprobar si es factible o no y, en caso afirmativo, obtener su punto extremo asociado Continuar

Listado de todas las soluciones básicas de un problema de Programación Lineal

Obtención de soluciones básicas factibles (relación con puntos extremos)

$\text{Máx } Z=2x_1+x_2$
 s. a. $x_1+2x_2 \leq 6$
 $x_1-x_2 \leq 4$
 $x_2 \leq 2$
 $x_1, x_2 \geq 0$

$\text{Máx } Z=2x_1+x_2+0s_1+0s_2+0s_3$
 s. a. $x_1+2x_2+s_1=6$
 $x_1-x_2+s_2=4$
 $x_2+s_3=2$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Variables no básicas	Variables básicas	Solución básica	¿Es factible?	Punto extremo asociado	Valor de Z
x_1, x_2	s_1, s_2, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 6, 4, 2)$			
x_1, s_1	x_2, s_2, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 3, 0, 7, -1)$			
x_1, s_2	x_2, s_1, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, -4, 14, 0, 6)$			
x_1, s_3	x_2, s_1, s_2	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 2, 2, 6, 0)$			
x_2, s_1	x_1, s_2, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (6, 0, 0, -2, 2)$			
x_2, s_2	x_1, s_1, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (4, 0, 2, 0, 2)$			
s_1, s_2	x_1, x_2, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (14/3, 2/3, 0, 0, 4/3)$	SI	$(x_1, x_2) = (14/3, 2/3)$	
s_1, s_3	x_1, x_2, s_2	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (2, 2, 0, 4, 0)$			
s_2, s_3	x_1, x_2, s_1	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (6, 2, -4, 0, 0)$			

Volver

Comprobación de la factibilidad de una solución básica y obtención del punto extremo asociado

Obtención de soluciones básicas factibles (relación con puntos extremos)

$\text{Máx } Z=2x_1+x_2$
 s. a. $x_1+2x_2 \leq 6$
 $x_1-x_2 \leq 4$
 $x_2 \leq 2$
 $x_1, x_2 \geq 0$

$\text{Máx } Z=2x_1+x_2+0s_1+0s_2+0s_3$
 s. a. $x_1+2x_2+s_1=6$
 $x_1-x_2+s_2=4$
 $x_2+s_3=2$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Variables no básicas	Variables básicas	Solución básica	¿Es factible?	Punto extremo asociado	Valor de Z
x_1, x_2	s_1, s_2, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 6, 4, 2)$			
x_1, s_1	x_2, s_2, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 3, 0, 7, -1)$			
x_1, s_2	x_2, s_1, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, -4, 14, 0, 6)$			
x_1, s_3	x_2, s_1, s_2	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 2, 2, 6, 0)$			
x_2, s_1	x_1, s_2, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (6, 0, 0, -2, 2)$			
x_2, s_2	x_1, s_1, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (4, 0, 2, 0, 2)$			
s_1, s_2	x_1, x_2, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (14/3, 2/3, 0, 0, 4/3)$			
s_1, s_3	x_1, x_2, s_2	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (2, 2, 0, 4, 0)$			
s_2, s_3	x_1, x_2, s_1	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (6, 2, -4, 0, 0)$	NO	—	

Volver

Comprobación de la no factibilidad de una solución básica

Este material permite finalmente evaluar la función objetivo en los puntos extremos (soluciones básicas factibles) y obtener la solución óptima.

Obtención de soluciones básicas factibles (relación con puntos extremos)

$\text{Máx } Z=2x_1+x_2$
 s. a. $x_1+2x_2 \leq 6$
 $x_1-x_2 \leq 4$
 $x_2 \leq 2$
 $x_1, x_2 \geq 0$

$\text{Máx } Z=2x_1+x_2+0s_1+0s_2+0s_3$
 s. a. $x_1+2x_2+s_1=6$
 $x_1-x_2+s_2=4$
 $x_2+s_3=2$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Variables no básicas	Variables básicas	Solución básica	¿Es factible?	Punto extremo asociado	Valor de Z
x_1, x_2	s_1, s_2, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 6, 4, 2)$	SI	$(x_1, x_2) = (0, 0)$	0
x_1, s_1	x_2, s_2, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 3, 0, 7, -1)$	NO	—	
x_1, s_2	x_2, s_1, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, -4, 14, 0, 6)$	NO	—	
x_1, s_3	x_2, s_1, s_2	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 2, 2, 6, 0)$	SI	$(x_1, x_2) = (0, 2)$	2
x_2, s_1	x_1, s_2, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (6, 0, 0, -2, 2)$	NO	—	
x_2, s_2	x_1, s_1, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (4, 0, 2, 0, 2)$	SI	$(x_1, x_2) = (4, 0)$	8
s_1, s_2	x_1, x_2, s_3	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (14/3, 2/3, 0, 0, 4/3)$	SI	$(x_1, x_2) = (14/3, 2/3)$	10
s_1, s_3	x_1, x_2, s_2	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (2, 2, 0, 4, 0)$	SI	$(x_1, x_2) = (2, 2)$	6
s_2, s_3	x_1, x_2, s_1	$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (6, 2, -4, 0, 0)$	NO	—	

Obtención de la solución óptima a través de la evaluación de la función objetivo en los puntos extremos

Obtención de la solución óptima mediante la evaluación de la función objetivo en los puntos extremos