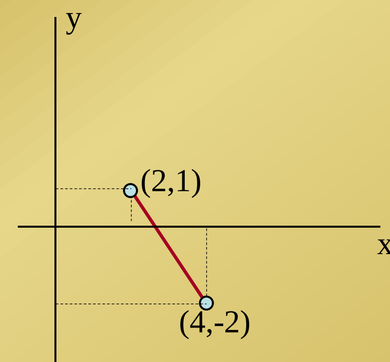
AUTORAS: M.J. García-Ligero Ramírez y P. Román Román
Departamento de Estadística e I.O. Universidad de Granada

Tema 2: Conjuntos convexos

Definición: Sean $x=(x_1,x_2,..., x_n)$ e $y=(y_1, y_2,\dots, y_n)\in \mathbb{R}^n$, entonces a $\alpha x+(1-\alpha)x$, $0\leq\alpha\leq 1$ se le denomina **segmento entre x e y**

Ejemplo: Consideremos $x=(2,1)$ e $y=(4,-2)\in \mathbb{R}^2$, el segmento entre x e y es, de acuerdo con la definición anterior, la colección de todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ expresados de la forma $\alpha(2,1)+(1-\alpha)(4,-2)$ tal que $0\leq\alpha\leq 1$.

Si $\alpha=0 \longrightarrow (4,-2)$
Si $\alpha=1 \longrightarrow (2,1)$
Si $\alpha=1/3 \longrightarrow (10/3,-1)$
Si $\alpha=1/2 \longrightarrow (3,-1/2)$



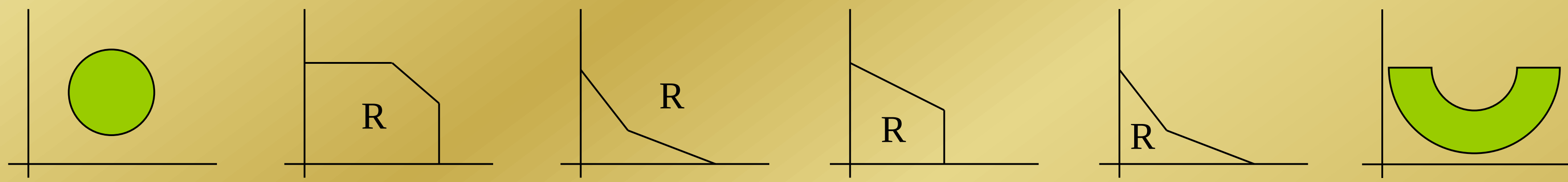
Definición: Un conjunto C subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es convexo si $\forall\, x_1, x_2 \in C$ y $\alpha \in \mathrm{R}$ con $0\leq\alpha\leq 1$ el punto $\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\in C.$

Observemos que para $\alpha\in[0,1]$, el vector $\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\in C$ representa un punto en el segmento de recta que une x_1 y x_2. Cualquier punto de la forma $\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$ con $0\leq\alpha\leq 1$ se denomina combinación convexa (o promedio ponderado) de x_1 y x_2. Si $0<\alpha<1$, entonces se dice que la combinación convexa es estricta. Así pues, la convexidad de C se puede interpretar como:
para cualquier pareja de puntos de x_1 y x_2 de C, el segmento de recta que los une (esto es, las combinaciones convexas de los dos puntos) debe pertenecer a C.

AUTORAS: M.J. García-Ligero Ramírez y P. Román Román
Departamento de Estadística e I.O. Universidad de Granada

Tema 2: Conjuntos convexos

Ejemplos



Propiedades de los conjuntos convexos

1.- Si $X_1, \ldots, X_n$ son subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$ es también convexo (no es necesario que n sea finito.

2.- La unión de conjuntos convexos, en general, no es convexa

3.- Si I={1,…, m } es un conjunto finito y X_i, con $i \in I$ convexos, entonces $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es también convexo.

4.- Si X subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es convexo y λ número real, entonces $\lambda X = \{y \in R^n : y = \lambda x,\ x \in X\}$ es convexo.

AUTORAS: M.J. García-Ligero Ramírez y P. Román Román
Departamento de Estadística e I.O. Universidad de Granada

Tema 2: Conjuntos convexos

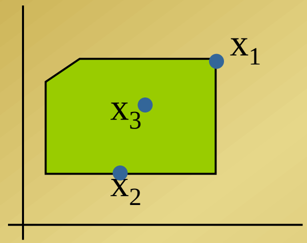
Definición: Un punto x perteneciente a C, siendo C un conjunto convexo, se denomina **punto extremo de C** si x no se puede representar como una combinación convexa estricta de dos puntos distintos de C.

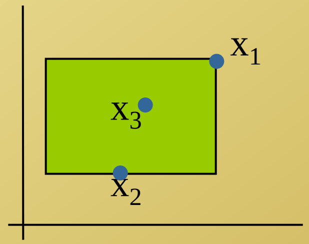
$\nexists\, x_1 \neq x_2 \in C$ tales que $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2,\ \forall \alpha:\ 0 < \alpha < 1,$

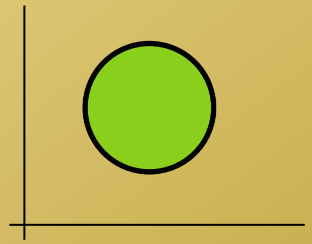
o equivalentemente,

si $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2,\ 0 < \alpha < 1$ y $x_1,\ x_2 \in C \implies x_1 = x_2 = x.$

Ejemplos:







AUTORAS: M.J. García-Ligero Ramírez y P. Román Román
Departamento de Estadística e I.O. Universidad de Granada

Tema 2: Conjuntos convexos

Definición: Un conjunto V de $\mathbb{R}^n$ es una **variedad lineal**, si dados cualesquiera puntos $x_1, x_2 \in V$, se tiene $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Definición: Un **hiperplano** de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de soluciones a una ecuación lineal o equivalentemente el conjunto de la foma $\{x \in R^n : a^T x = c\}$ donde *a* es un vector no nulo de dimensión *nx1* y *c* es un número real.

Ejemplos:

• Un hiperplano en $\mathbb{R}$ es el conjunto de puntos satisfaciendo la ecuación de la forma $ax=c$, por tanto un punto.
•Un hiperplano en el plano es una recta.
•Un hiperplano en el espacio es un plano.

Observar que un hiperplano divide al espacio en dos regiones que denominamos **semiespacios.**

Definición: Un **semiespacio** de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de soluciones $\{x \in R^n : a^T x \geq c\}$ o también $\{x \in R^n : a^T x \leq c\}$

Teorema: Un hiperplano es un conjunto convexo

Definición: Sea *P* un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es un poliedro si y sólo si se puede expresar como $P = \{x \in R^n : A\ x \leq b\}$ donde *A* es una matriz de dimensión *mxn* y *b* es un vector de dimensión *m*.