

Ejemplos Resueltos Tema 4

2012

1. Contraste de Hipótesis para la Media μ (con σ conocida)

Dada una muestra de tamaño n y conocida la desviación típica de la población σ , se desea contrastar la hipótesis nula:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

frente a la alternativa:

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

con un nivel de significación α .

Dado el valor muestral de la media \bar{X} , se determina el estadístico de contraste:

$$z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Dado el nivel de significación α se determina el valor $z_{\alpha/2}$ tal que

$$\alpha = P(|Z| \geq z_{\alpha/2})$$

Es decir, se obtiene el cuantil¹ de orden $1 - \alpha/2$, $z_{\alpha/2}$, en el modelo normal, tal que las colas a izquierda y derecha de los valores $\mp z_{\alpha/2}$, suman un área total igual a α .

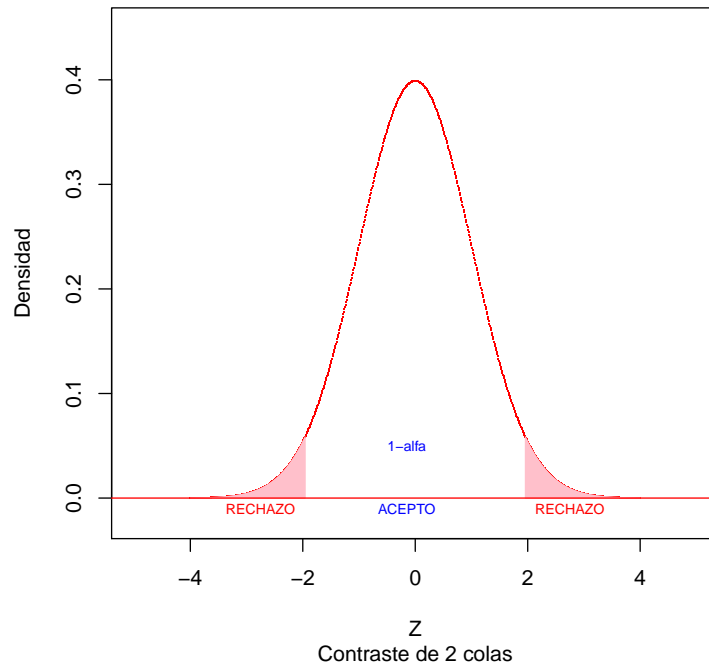
Si $|z_c| > z_{\alpha/2}$ se decide rechazar la hipótesis nula.

Si $|z_c| \leq z_{\alpha/2}$ no se puede rechazar la hipótesis nula.

El gráfico siguiente muestra las zonas de aceptación y rechazo de la hipótesis nula:

¹En la bibliografía existente es corriente usar la notación z_α para indicar el cuantil de orden $1 - \alpha$, es decir, el subíndice indica el área que queda a la derecha del cuantil en el gráfico del modelo de probabilidad. También la usaremos aquí.

Distribución normal estandarizada



Ejemplo de contraste de hipótesis para la media, μ con σ conocida (dos colas)

Se desea contrastar con un nivel de significación del 5% la hipótesis de que la talla media de los hombres de 18 o más años de un país es igual a 180. Suponiendo que la desviación típica de las tallas en la población vale 4, contraste dicha hipótesis frente a la alternativa de que es distinta.

$$H_0 : \mu = 180$$

frente a la alternativa:

$$H_1 : \mu \neq 180$$

Los datos constituyen una muestra de $n=15$ hombres seleccionados al azar, cuyas alturas son:

167 167 168 168 168 169 171 172 173 175 175 175 177 182 195

Es necesario determinar la media de la muestra, \bar{X} , y los valores de los cuantiles, $z_{\frac{\alpha}{2}}$, en la distribución normal. En el modelo normal, el cuantil de orden 0.975 es $z_{0,025} = 1,96$.

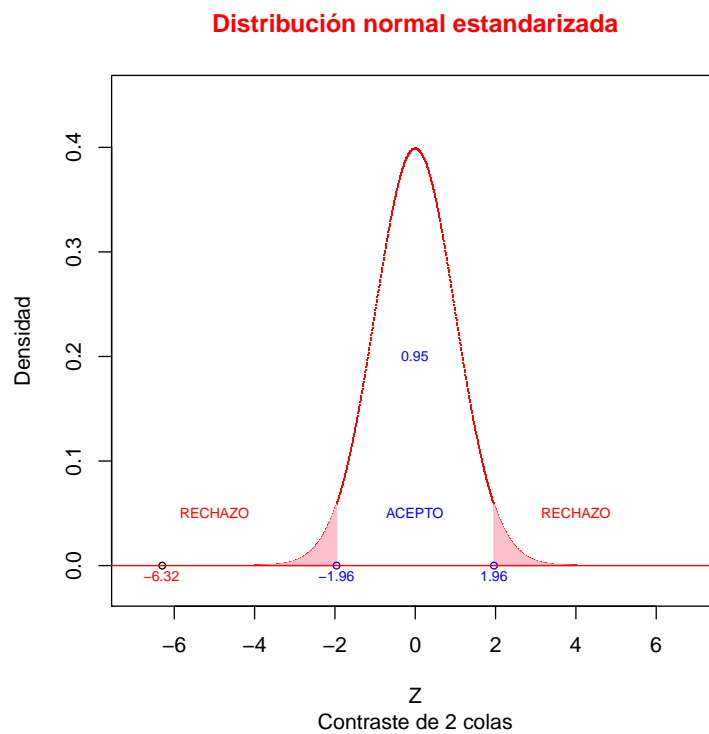
La media de la muestra es igual a 173.47.

Sustituyendo los datos en la expresión del estadístico de contraste, tenemos:

$$z_c = \frac{173,47 - 180}{\frac{4}{\sqrt{15}}} = -6,32$$

El valor del estadístico de contraste está en la zona de rechazo. Por lo que se rechaza la hipótesis nula que establece una talla media igual a 180 cm.

Gráficamente la situación es la siguiente:



Ejemplo de Contraste de hipótesis para la media con σ conocida (una cola)

Se desea contrastar con un nivel de significación del 5% la hipótesis de que la talla media de los hombres de 18 o más años de un país es igual o mayor a 175. Suponiendo que la desviación típica de las tallas en la población vale 4, contraste dicha hipótesis frente a la alternativa de que es menor, con una muestra de $n=15$ hombres seleccionados al azar, cuyas alturas son las del apartado anterior:

$$H_0 : \mu \geq 175$$

frente a la alternativa:

$$H_1 : \mu < 175$$

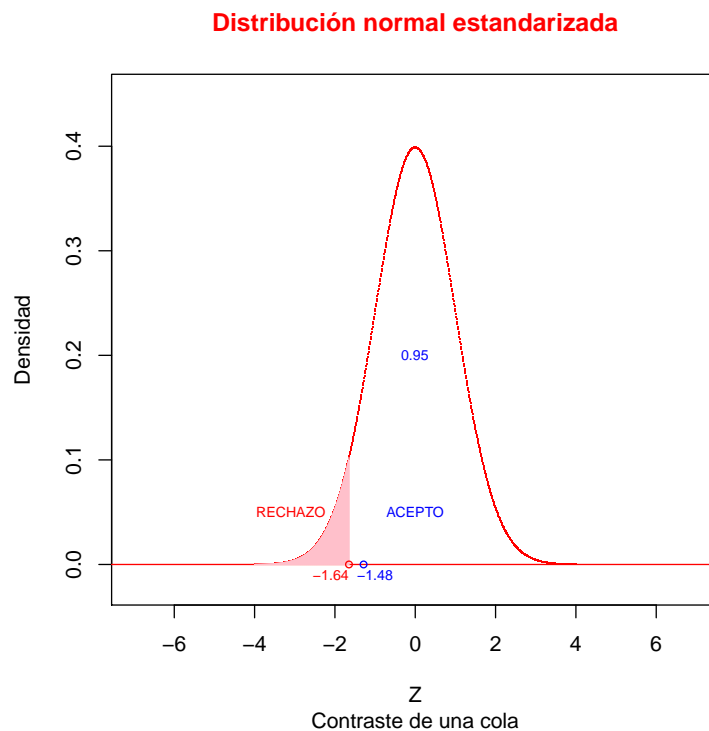
En el modelo normal, el cuantil de orden 0.05 es $-z_{0,05} = -1,64$.

Sustituyendo los datos en la expresión del estadístico de contraste, tenemos:

$$z_c = \frac{173,47 - 175}{\frac{4}{\sqrt{15}}} = -1,48$$

El valor del estadístico de contraste está en la zona de aceptación. Por lo que no se puede rechazar la hipótesis nula que establece una talla media igual o mayor a 175 cm.

Gráficamente la situación es la siguiente:



Ejemplo de Contraste de Hipótesis para la media μ con σ desconocida (una cola)

Supongamos que se desconoce la desviación típica de las tallas en la población del ejemplo anterior. Se desea contrastar la hipótesis nula siguiente a un nivel de significación del 5%.

$$H_0 : \mu \leq 168$$

frente a la alternativa:

$$H_1 : \mu > 168$$

En este caso es necesario estimar la desviación típica de la población con los datos de la muestra.

Dado el valor muestral de la media \bar{X} y la cuasidesviación típica de la muestra, s , se determina el estadístico de contraste:

$$t_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

En este ejemplo el contraste es de una cola, tal que el nivel de significación α que determina el valor t_α es tal que

$$\alpha = P(t_{n-1} \geq t_\alpha)$$

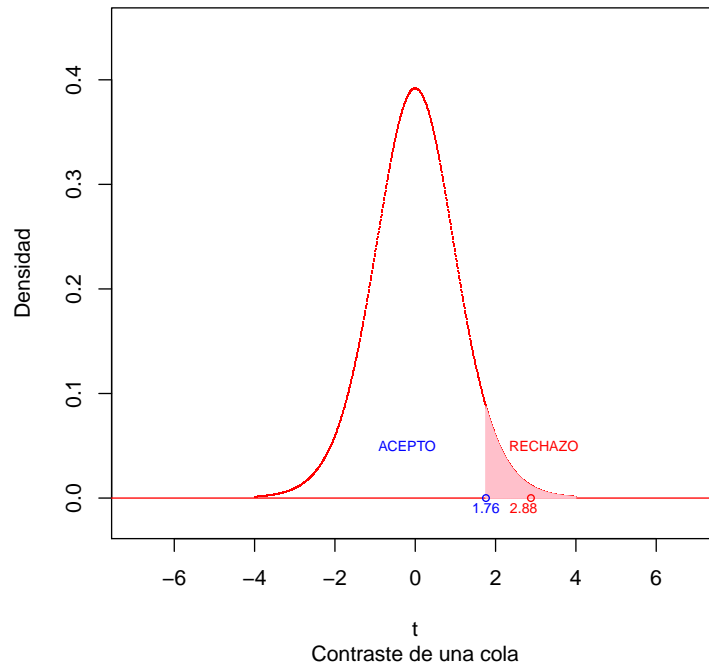
Para el nivel de significación dado, $\alpha = 0,05$, es necesario determinar el cuantil en la distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad y el valor s (cuasidesviación típica) de la muestra:

Para los datos de la muestra se obtiene que $\bar{X} = 137,47$ y $s = 7,36$. El cuantil en la distribución t_{14} es $t_\alpha = 1,762$. De modo que sustituyendo en la expresión del estadístico de contraste, tenemos:

$$t_c = \frac{137,47 - 168}{\frac{7,36}{\sqrt{15}}} = 2,88$$

El gráfico siguiente muestra la situación que nos lleva a rechazar la hipótesis nula, dado que el valor del estadístico de contraste cae en la zona de rechazo.

Distribución t de Student 14 g.l.



2. Contraste de hipótesis para la proporción

El contraste de 2 colas establece las hipótesis:

$$H_0 : p = p_0$$

frente a la alternativa

$$H_1 : p \neq p_0$$

donde p es la probabilidad del éxito y $q=1-p$ es la probabilidad del fracaso.

Para un nivel de significación α , es necesario determinar el valor del cuantil $z_{\alpha/2}$ en una distribución normal. Dada la proporción muestral, el estadístico de contraste viene dado por

$$z_c = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}}$$

Ejemplo de Contraste de Hipótesis para la proporción (una cola)

En una muestra de 105 comercios seleccionados al azar de una zona, se observa que 27 de ellos han tenido pérdidas en este mes. Un analista económico de la zona establece que la proporción de comercios en la zona con pérdidas es igual o superior a 0.35. Contraste dicha hipótesis a un nivel de significación del 5 %.

El contraste de una cola establece las hipótesis:

$$H_0 : p \geq 0,35$$

frente a la alternativa

$$H_1 : p < 0,35$$

La proporción en la muestra, p , de comercios con pérdidas es:

$$p = \frac{27}{105} = 0,26$$

$$q = 1 - p = 0,74$$

El cuantil $-z_\alpha$ correspondiente al nivel de significación 0.05 es igual a $-z_\alpha = -1,65$

El valor del estadístico de contraste es

$$z_c = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} = \frac{0,26 - 0,35}{\sqrt{\frac{0,35 \times 0,65}{105}}} = -1,93$$

Gráficamente tenemos

Distribución normal estandarizada

