TALLER DE PREPARACIÓN PARA LA OLIMPIADA MATEMÁTICA

En la primera parte de la sesión trabajamos algunas aplicaciones del principio del palomar. Pasamos luego a recordar algunas técnicas de conteo enfatizando la importancia de los números binomiales y trabajando el principio de inclusión-exclusión. En la última parte trabajaremos algunos problemas de aritmética.

1. El principio del palomar

El principio del palomar (a veces llamado principio de Dirichlet o principio de las cajas) establece que si n palomas se distribuyen en m palomares y si $n > m$, entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma. Hay aplicaciones muy sencillas del mismo que encontramos en nuestra vida diaria; por ejemplo, si sabemos que una persona ha comido 16 yogures a lo largo de la semana, podemos concluir que un día ha comido al menos tres.
Vamos a analizar algunas aplicaciones menos sencillas del mismo y que han aparecido en algunas olimpiadas.

Problema 1. Una tienda que abre todos los días del año ha vendido, durante el año 2022, un total de 629 bicicletas. Sabiendo que cada día del año ha vendido al menos una bicicleta, probar que hay un periodo de días consecutivos durante los cuales se han vendido exactamente 100 bicicletas.

Problema 2. En un polígono regular de 67 lados trazamos todos los segmentos que unen dos vértices, incluidos los lados del polígono. Escogemos n de esos segmentos y asignamos a cada uno de ellos un color entre 10 colores posibles. Hallar el valor mínimo de n que garantiza, que independientemente de cuáles sean los n segmentos elegidos y de cómo se haga la asignación de colores, siempre habrá un vértice del polígono que pertenece a 7 segmentos del mismo color.

2. Combinatoria enumerativa

La mayoría de problemas de combinatoria se centran en contar las cantidades de elementos de un conjunto. Este primer problema repasa alguno de los principios más habituales.

Problema 3. Contar de cuántas maneras se pueden realizar las siguientes elecciones.

1. El número de palabras de longitud n en un diccionario de k letras.
2. El número de maneras de distribuir 100 personas en una fila.
3. El número de maneras de distribuir 100 personas en un círculo.
4. El número de maneras de formar un tribunal compuesto de un presidente, un vocal y un secretario (si hay n ciudadanos elegibles).
5. El número de maneras de formar un tribunal compuesto de tres vocales (si hay n ciudadanos elegibles).
6. El número de maneras de formar un tribunal compuesto de tres vocales, dos secretarios y un presidente (si hay n ciudadanos elegibles).

Problema 4. Los siguientes apartados son independientes entre sí.

(a) Hallar el número de soluciones enteras de la ecuación

$$abcde = 2^{100},$$

donde $a, b, c, d, e \geq 1$. ¿Qué pasa si imponemos que $a, b, c, d, e > 1$?

(b) Hallar el número de maneras de elegir 25 números entre 100 y 999 de manera que la diferencia entre dos de ellos es siempre al menos 37 (en valor absoluto).

Problema 5. Los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ son los vértices de un polígono regular de $2n$ lados. Encontrar el número de ternas A_i, A_j, A_k tales que el triángulo $A_iA_jA_k$ es rectángulo, y el número de ternas para las cuales es acutángulo.

3. El principio de inclusión-exclusión

En combinatoria, el principio de inclusión-exclusión permite calcular el tamaño de la unión de varios conjuntos, mediante los cardinales de cada uno de ellos y de todas sus posibles intersecciones. Vamos a trabajar un ejemplo sencillo.

Problema 6. En una ciudad de 351 adultos, cada adulto tiene un coche, una moto o ambos. Si 331 adultos tienen un coche y 45 adultos una moto, ¿cuántos de los que tienen un coche no tienen una moto?

El siguiente ejemplo es ligeramente más complicado.

Problema 7. Seis personas de diferentes alturas se sitúan en una fila. Determinar de cuántas maneras se pueden situar de manera que tres personas consecutivas cualesquiera nunca estén en orden creciente de altura, vistas de adelante hacia atrás.

4. Problemas variados de combinatoria

Dejamos a continuación tres problemas que tocan diferentes temas: el primero se puede encuadrar en lo que se conoce como teoría de grafos y en el tercero aparecen los números de Catalan, muy habituales a la hora de contar.

Problema 8. Los siguientes apartados son independientes entre sí.

(a) Supongamos ahora que hay seis personas en la fiesta. Probar que hay un grupo de tres tales que o bien todos son amigos entre sí o ninguno es amigo.

(b) Supongamos que la amistad siempre es recíproca y que nadie es amigo de sí mismo. Probar que en una fiesta siempre hay dos personas con el mismo número de amigos.

(c) Adela y Baltasar se encuentran en una fiesta junto a otras 100 parejas. Algunas personas se dan la mano durante la fiesta, aunque nadie lo hace ni consigo mismo ni con su esposa. Adela observa que cuando considera al resto de asistentes (es decir, todos menos ella, pero incluyendo a su pareja Baltasar) todos han estrechado la mano con un número diferente de personas. ¿Con cuántas personas se ha dado la mano Baltasar?

Problema 9. Ponemos $2n$ perlas blancas y $2n$ perlas negras formando una cadena. Probar que siempre es posible cortar un segmento de la cadena de manera que contenga exactamente n perlas blancas y n perlas negras.

Problema 10. Determinar cuántas palabras de longitud 21 se pueden formar con los números $\{-1, 0, 1\}$ de manera que contienen exactamente 5 ceros, la suma de los primeros k números es no-negativa para todo k y la suma de los 21 números es 0.

5. Un poco de aritmética

Acabamos la sesión con algunos problemas de teoría de números, repasando conceptos como la aritmética modular o la divisibilidad.

Problema 11. Para cada número natural n, se considera el entero positivo

$$444\ldots44888\ldots889,$$

formado por n cuatros y $n-1$ ochos. Demostrar que cada uno de ellos es un cuadrado perfecto y hallar la raíz cuadrada.

Problema 12. Determinar los valores de n para los cuales el número $3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n$ es compuesto.

Problema 13. Encontrar todos los enteros a, b y c que verifican el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} |a+b| + c &= 19, \\ ab + |c| &= 97. \end{aligned}$$

Problema 14. Encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación

$$a^2 + 3b^2 = 2c^2.$$

Problema 15. Encontrar todos los enteros tales que $a^2 + 4b$ y $b^2 + 4a$ son ambos cuadrados perfectos.

Problema 16. Encontrar todas las parejas de enteros no negativos (a, b) que satisfacen

$$a^3 b^2 = (a^2 + b)^3.$$