I CAMPUS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE ANDALUCÍA
Concurso

Problema 1. Encuentra todos los enteros no negativos a y b que satisfacen la ecuación

$$3 \cdot 2^a + 1 = b^2.$$

Solución. Si $a = 0$, entonces $b = 2$, y si $a = 1$, tenemos que $b^2 = 7$ y no hay solución. Si $a \geq 2$, entonces 2^a es múltiplo de 4 y b es impar, $b = 2c + 1$. Tenemos por tanto que

$$3 \cdot 2^a = b^2 - 1 = (b-1)(b+1) = 4c(c+1),$$

de donde resulta que $3 \cdot 2^{a-2} = c(c+1)$. Si $a = 2$, entonces $3 = c(c+1)$, que no es posible.
Si $a > 2$ y $c + 1$ es par, entonces c es impar y divide a 3, con lo que $c = 1$ o $c = 3$. Es fácil ver que c no puede ser 1 y si $c = 3$ tenemos que $2^{a-2} = 4$, con lo que $a = 4$ y $b = 7$.
Si $a > 2$ y c es par, entonces $c + 1$ es impar y divide a 3, con lo que $c = 0$ o $c = 2$. Es fácil ver que c no puede ser 0 y si $c = 2$, tenemos que $2^{a-2} = 2$, con lo que $a = 3$ y $b = 5$.
Por consiguiente, las soluciones son $(a, b) = (0, 2)$, $(3, 5)$, $(4, 7)$.

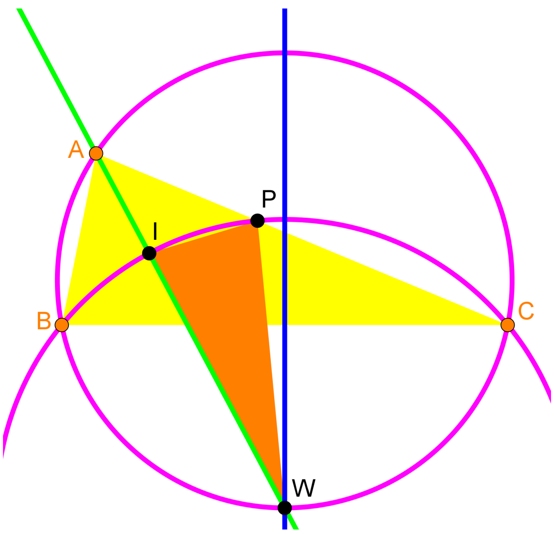
Problema 2. Sea ABC un triángulo con $BC = AC \neq AB$. Sea W el punto medio del arco BC que no contiene a A. La circunferencia de centro W que pasa por C vuelve a cortar a la recta AC en un punto P. Si I es el incentro de $\triangle ABC$, demuestra que los triángulos ABC y PIW son semejantes.

Solución. Como W es el punto medio del arco BC que no contiene a A, tanto la bisectriz de $\angle BAC$ como la mediatriz de BC pasan por W. Así, A, I y W están alineados y $WC = WB$. Además, el triángulo WIC es isósceles en W ya que si $\alpha = \beta$ y γ son los ángulos de $\triangle ABC$, entonces

$$\angle WIC = 180^\circ - \angle CIA = \angle IAC + \angle ACI = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}, \quad \text{y}$$

$$\angle ICW = \angle ICB + \angle BCW = \frac{\gamma}{2} + \angle BAW = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

Por tanto, la circunferencia centrada en W que pasa por C también pasa por B y por I.



El simétrico de B con respecto a la recta AW es otro punto de la circunferencia, pues AW pasa por su centro. Además, como AW es una bisectriz y B está en la recta AB, su simétrico debe estar en la recta AC, así que es P o es C. C se descarta debido a que $AB \neq AC$. Por simetría, el triángulo PIW es congruente a $\triangle BIW$, así que tenemos que ver que $\triangle BIW$ y $\triangle ABC$ son semejantes. Ambos son triángulos isósceles, por lo que por el criterio lado-ángulo-lado solo falta comprobar que dos ángulos son iguales, y lo son porque $\angle IWB = \angle AWB = \angle ACB$ por arco capaz.

Problema 3. Sea n un número entero mayor que 1. ¿De cuántas formas se pueden situar todos los números $1, 2, 3, \ldots, 2n$ en las casillas de una cuadrícula de $2 \times n$, uno en cada casilla, de manera que cualesquiera dos números consecutivos se encuentren en casillas que comparten un lado en la cuadrícula?

Solución. Vamos a contar cuántos caminos visitan cada casilla exactamente una vez y en los que cada paso es a una casilla adyacente. En primer lugar, sea a_n el número de caminos que empiezan en la casilla correspondiente a la esquina superior izquierda. Por simetría, hay a_n caminos que empiezan en cada una de las otras esquinas. Supongamos que el primer paso es hacia la derecha; entonces, el camino continúa hacia la derecha hasta llegar a la esquina superior derecha, dado que un paso hacia abajo dividiría a la cuadrícula en dos partes. Si el primer paso es hacia abajo, en cambio, el siguiente es hacia la derecha y el camino puede completarse de a_{n-1} formas. Por lo tanto, $a_n = a_{n-1} + 1$, y como $a_2 = 2$ tenemos por trivial inducción que $a_n = n$.
Vamos a contar ahora cuántos caminos empiezan en la casilla superior de la j-ésima columna, con $1 < j < n$. Si el primer paso es hacia la derecha, entonces el camino continúa hacia la derecha hasta llegar a la esquina superior derecha, momento en el cual desciende para pasar a avanzar hacia la izquierda hasta llegar a la casilla inferior de la columna j-ésima. El camino puede completarse luego de $a_{j-1} = j - 1$ formas. Análogamente, si el primer paso es hacia la izquierda, el camino puede completarse de $a_{n-j} = n - j$ formas. En total, tenemos $(j - 1) + (n - j) = n - 1$ caminos. Por tanto, la respuesta es

$$4n + 2\sum_{j=2}^{n-1}(n-1) = 4n + 2(n-2)(n-1) = 2n^2 - 2n + 4.$$