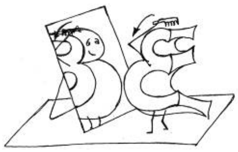


ε REFLEJOS MATEMÁTICOS EN ÉPSILON ∈

1. Reconocer
¿Qué mejor forma de unirme al festejo por los 25 años de la sociedad THALES que homenajear la cabecera de la revista, y buscar los reflejos matemáticos de *épsilon*? (figura 1)

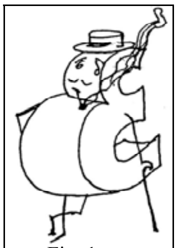


Fig. 1

Comencemos como siempre, buscando en los diccionarios qué significar **épsilon**:
- En el Dicccionario de la Real Academia Española de la Lengua (2001)encontramos:
(Del gr. ε, e, y ψιλόν, sencilla, breve). Quinta letra del alfabeto griego (E, ε), que corresponde a e breve del latino.

- En el Diccionario del español actual, de Seco y otros (1999), nos dice:
Letra del alfabeto griero que representa el sonido [e] breve

Luego el término se refiere a una letra griega, breve, por más señas.

- En el diccionario de Pabón (1976), nos dan más datos:
E ε épsilon [quinta letra del alfabeto griego]// como signo numérico ε' cinco o quintos; ,ε cinco mil.

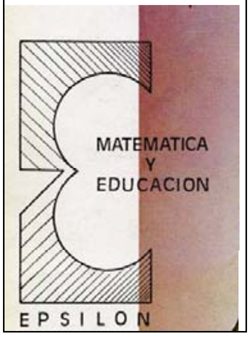
Por tanto en su definición podemos encontrar alguna referencia matemática.
Pero hay muchas letras griegas que se han utilizado para expresar cantidades. Por tanto no creemos que sea esta la razón de que la revista se llame épsilon.

Para profundizar en su sentido recurrimos a la editorial del primer director de la revista, Rafael Pérez Gómez, quien en el Épsilon nº 1 nos decía (el subrayado es nuestro):
En los Estatutos [de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía] aparecen entre sus fines la publicación de la revista "ÉPSILON". Es éste un nombre que, según formaciones matemáticas, estará mejor o peor visto, pero su carácter sí es bien conocido por todos: <u>tan pequeño como se quiere</u> y a la vez importantísimo, por <u>estar presente en los conceptos fundamentales de la Matemática</u>, y <u>trazar fronteras, sujetas a variación, que aglutinan alrededor de un objetivo infinidad de elementos, dejando fuera a muy pocos</u>.

¿Qué quiere decir Rafael con que épsilon está en los conceptos fundamentales de la Matemática? (y todo lo demás). Para profundizar en ello vamos a realizar el ciclo: reconocer, relato-análisis, explotación didáctica, que caracteriza esta sección de la revista.

Comencemos por ver su manifestación.

Fig 2: Primera cabecera



En la portada del primer número de la revista Épsilon, en 1984, en Granada, se emplea una letra mayúscula (figura 2). El número parece mecanografiado, y la cabecera sugiere una construcción con regla y compás, tal como se muestra en la figura 3. Conversaciones con los editores de entonces me confirman que el diseño es de Luis Orihuela Hervás, y que lo realizó con regla y compás. Este diseño se utilizará en el APMA como logotipo de la primera época. Las demás letras también se han hecho a mano, pero rotuladas con plantilla.

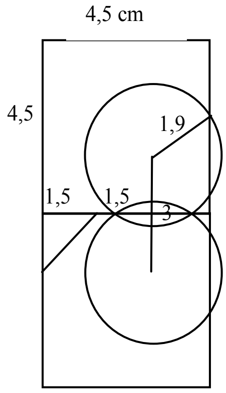


Fig 3

Fig 4: Cabecera del nº 2

A partir del segundo número surge la que será la cabecera que ahora tenemos, debida a Fernando Hernández Rojo. En ella aparece la palabra completa, iniciada por una letra intermedia entre la "e" latina (que comienza la palabra española), y la letra griega. Se trata de un signo con dos lóbulos, pero en el que se alarga el trazo del lóbulo inferior, simulando una escritura caligráfica latina, vertical, y de letras separadas. Otro signo característico de esta cabecera es la figura que representa la "o", que consiste en un hexágono dividido en tres partes iguales (figura 4).

Fig 5: Cabecera del nº 10

Los siguientes números de la revista repiten el logotipo. Así, en el número 10, primero que aparece como revista de la SAEM THALES (figura 5) en 1988, se repite esta cabecera, a una tinta azul, sobre fondo sombreado de azul. Manuel Iglesias Cerezal, primer director de la revista de la THALES unificada respeta el diseño. Más adelante, con la incorporación de Javier Pérez, se mantiene el formato, aunque la portada adquiere más colorido (número 19, de 1991, figura 6). Durante este año se ha girado el título +90º. Posteriormente, durante un año, Javier Pérez y sus colaboradores introducen una variante en la cabecera del número 26, que consiste en aplicar una simetría axial a la palabra, respecto a una recta perpendicular a la línea de escritura, y luego una simetría central a esta, resultando la cabecera que aparece en la figura 7, y que sólo durará ese año 1993.


Fig 6

Fig 7: Cabecera del nº 26

Por último, la dirección de Antonio Moreno mantiene la cabecera, aunque se han cambiado los tonos de la portada (figura 8, número 60, de 2004).

2. Relatar-Análizar

Fig 8: Cabecera del nº 60

Para documentarnos acerca del término hemos recurrido a una compañera, catedrática de Griego en el IES Padre Suarez, de Granada, Begoña Lamolda. Ella nos indica que el alfabeto griego procede del fenicio, usándose por primera vez en Mileto (¡cuna de THALES!), entre los siglos VII a VI a.C., con ciertas adaptaciones. El alfabeto fenicio sólo se compone de consonantes. Los griegos, al necesitar vocales para adaptar la grafía a sus fonemas, utilizaron signos consonánticos que no tenían correspondencia con los fonemas griegos. Esto es lo que ocurre con la consonante gutural fenicia *he*, que pasó a reflejar la vocal griega *épsilon*. El signo fenicio de *he* es Ǝ. En esta adaptación griega del alfabeto fenicio se respeta la escritura de derecha a izquierda que hacen estos, y siempre sólo con las mayúsculas. Posteriormente los griegos comenzaron a escribir de manera alternativa de derecha a izquierda y de izquierda a derecha, siguiendo una sola línea. Cuando se escribía así las letras se invertían. Este modo de escritura se llama *bustrofedón*. La voz proviene del griego: Βου- (bou, *buey*) - στροφή- (strofe, *vuelta* o *giro*) -δον (sufijo adverbial) por semejanza entre la dirección de la escritura y la trayectoria formada en las tierras de labor con el arado (tirado por bueyes) (http://es.wikipedia.org/wiki/Bustrofedon).

Al final y definitivamente la dirección de la escritura fue de izquierda a derecha, y se mantiene como representación de la letra la que resultaría en esta escritura, es decir: E.

Es en la época bizantina donde aparece la letra minúscula. Sobre el siglo IX de nuestra era, y alrededor de la actividad de transmisión de la literatura griega por parte de Focio, patriarca de Constantinopla, se emprende la tarea de copiar los viejos manuscritos que están en un tipo de letra que se llama “uncial”, caracterizada por su tamaño y forma. Para facilitar la tarea se utiliza la minúscula inspirada en ese tipo, ya que con ella se aprovecha mejor la página y se reduce el tiempo de copia, pues el escriba conseguía una notable velocidad en la escritura. Los primeros manuscritos con esta escritura, usando además signos de acentuación y separación de palabras se les ha llamado transliterados, y se datan entre el 85 y el 1000 de nuestra era.

Resumimos pues, la épsilon proviene de una letra fenicia, que representa un fonema breve (se opone a la η), con una grafía que evoluciona desde la Ǝ a la E, con la influencia de la escritura en bustrofedón, y finalmente a las dos formas ε y ∊ con la escritura en minúscula inspirada en el *uncial* (ver tipos de letras latinas y griegas en uncial en http://guindo.pntic.mec.es/~jmag0042/escritura_uncial.pdf).

Ya tenemos nuestra Épsilon, con dos formas minúsculas ε y ∊. Pero ¿qué representa en matemáticas?

En primer lugar analicemos la misma forma de sus grafías.

∊ εεεεεεε ε εεεεε∊∊εεεεεεεεε

Figura 9: Representación de los épsilon minúscula en las letras de word


Fig 10

Mirando los 27 tipos de letra de word, hemos logrado extraer todas las épsilon minúsculas que aparecen en la figura 9. En ella vemos que se distribuyen de manera desigual. La mayor parte se inclinan por una letra ε formada por dos arcos, a la que vamos a llamar "lobulada" (23 tipos). Su construcción requiere trazar dos arcos de circunferencias que sean secantes, del mismo radio. Los otros se inclinan por ∈, forma que se ha empleado para elaborar el signo del euro, la vamos a llamar "circular" (4 tipos). Su construcción requiere trazar un solo arco de circunferencia, y un trozo del diámetro. En ambas grafías se detectan simetrías encubiertas, más perceptibles en la forma en arco. Por eso, si el épsilon hace el pino, como en la figura 10, el resultado es una épsilon.

Para seguir el análisis matemático comenzamos por mirar enciclopedias. En Wikipedia en inglés (http://en.wikipedia.org/wiki/Epsilon), encontramos que los épsilon se utilizan en matemáticas para los siguientes fines:

- En Análisis, para indicar una cantidad pequeña positiva, habitualmente denotada ε; llamada límite.
    - Por analogía, el matemático Paul Erdös también utilizaba el término "épsilon" para referirse a los niños
- En teoría de conjuntos, el límite ordinal de la secuencia $\omega, \omega^{\omega}, \omega^{\omega^{\omega}}, \ldots$
- En computación, la precisión de un dato numérico
- El símbolo de Levi-Civita (También llamado el símbolo de permutación, o símbolo antisimétrico, empleado particularmente en el cálculo tensorial. Su nombre lo debe al matemático y físico italiano Tullio Levi-Civita).

Si recurrimos a textos históricos, así como a los estudiosos del lenguaje matemático podemos centrarnos en alguno de estos usos. La primera utilización en Análisis Matemático, indicada por la enciclopedia, la refuerza el texto de Javier de Lorenzo (1971), quien nos recuerda que la inclusión del épsilon trata de evitar la imprecisión que encerraban los infinitésimos concebidos a partir de la intuición sensible. Es Weiertrass quien lo emplea por primera vez, para indicar el argumento de una función que puede tomar cualquier valor, en función del cual se puede encontrar otro (un lugar para las sucesiones, otra cota para las funciones), que verifica una desigualdad. Esta formulación da origen a lo que Chevalley llama el *estilo de los épsilon*. Con este estilo se llega a aritmetizar el Análisis, al demostrar que las operaciones con funciones y sucesiones verifican las mismas que los operadores, sin más que realizar una operatoria conveniente de los épsilon.

El formalizador por excelencia, Augustin Louis Cauchy, lo cita en su Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique, cuando indica:

> *Cela posé, si l'on désigne par k une quantitité fininie différente de zéro, et par ε un valeur variable qui décroisse indéfiniment avec la valeur numérique de α, la forme générale des quantitués infiniment petites du premier ordre sera kα ou de moins kα (±ε)*

[Dicho esto, si designamos por *k* una cantidad finita distinta de cero, y por *ε* un valor variable que disminuye indefinidamente con el valor numérico de *α*, la forma general de los infinitésimos de primer orden será *kα* o bien *kα(±ε)*.]

Posteriormente épsilon se utiliza en otro sentido en matemáticas. De nuevo recurrimos a Javier de Lorenzo (1972), quien nos recuerda el empleo que se hace en la Teoría de Conjuntos:

> *Signo fundamental de la Matemática, considerado como primitivo de la misma, es "∈". Deformación de la letra griega ε, primera del verbo εἶναι – ser-, el signo ∈ indica <u>pertenencia</u> de elemento a conjunto.*

Los textos de Bourbaki nos lo muestran en su esplendor (figura 11)

§ 1. RELATIONS COLLECTIVISANTES

1. La théorie des ensembles

La *théorie des ensembles* est une théorie dans laquelle figurent les signes spécifiques =, ∈, de poids 2; elle comporte, outre les schémas S1 à S7, donnés au chap. I, le schéma S8 qui sera introduit au nº 6 (II, p. 4), et les axiomes explicites A1 (II, p. 2), A2 (II, p. 4), A3 (II, p. 30), et A4 (III, p. 45). Ces axiomes explicites

Si $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{U}$ sont des termes, l'assemblage $\in \boldsymbol{TU}$ est une relation (dite *relation d'appartenance*) que nous noterons pratiquement de l'une quelconque des manières suivantes: $\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{U}$, $(\boldsymbol{T}) \in (\boldsymbol{U})$, « $\boldsymbol{T}$ appartient à $\boldsymbol{U}$ », « $\boldsymbol{T}$ est élément de $\boldsymbol{U}$ ». La relation « non($\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{U}$) » se note $\boldsymbol{T} \notin \boldsymbol{U}$.

Figura 11: Bourbaki, 1970

1. RELACIONES COLECTIVIZANTES

1. La Teoría de conjuntos

La *Teoría de conjuntos* es una teoría en la que figuran los signos específicos =, ∈, de peso 2; ello acarrea, además de los esquemas de S1 a S7 presentados en el capítulo I, el esquema S8 que será introducido en el apartado 6, y los axiomas explícitos A1, A2, A3 y A4. Estos axiomas explícitos no contienen letras: dicho de otra forma, la teoría de conjuntos es una teoría sin constantes.

Si **T** y **U** son términos, la expresión ∈**TU** es una relación (llamada relación *de pertenencia*) que notaremos de alguna de las maneras siguientes: **T**∈**U**, (**T**)∈(**U**), "**T** pertenece a **U**", "**T** es un elemento de **U**".

Aparte de otras utilizaciones particulares, como las que señala wikipedia, los más importantes parecen ser estos dos. Si nos dejamos llevar por los usos más frecuentes en nuestro entorno, nos inclinaríamos a pensar que las formas de la grafía de épsilon se emplean en Matemáticas con fines distintos, para cada uno de los dos aspectos señalados anteriormente. Sin embargo su empleo es indistinto. Así, en el texto de Bochenski (1976, figura 12), aparece el épsilon lobulado para la relación de pertenencia. Igualmente podemos encontrar el épsilon circular para la indicación de cota. En la comunidad lingüística científica su uso es indistinto. Parece ser que los anglosajones prefieren el circular y los de origen latino preferimos el lobulado.

15.13. "$y \varepsilon \hat{x}(\varphi x)$" en vez de: "$\varphi y$".

Explicación: Decir "y es un elemento de la clase de aquellos x para los que vale φx" equivale a decir: "φy". La "ε" es aquí un funtor diádico que, en la notación de Peano-Russell, se escribe entre los argumentos, y que forma un enunciado. El primer argumento debe ser el nombre de un individuo (una constante o una variable), y el segundo una clase.

Figura12:

Estas búsquedas nos muestran dos empleos importantísimos en matemáticas, además de otros usos: como cota (en análisis), y como relación (en teoría de conjuntos).

Por tanto podemos concluir que, tal como decía Rafael Pérez Gómez, el épsilon es *: <u>tan pequeño como se quiere</u> y a la vez importantísimo, por <u>estar presente en los conceptos fundamentales de la Matemática</u>, y <u>trazar fronteras, sujetas a variación, que aglutinan alrededor de un objetivo infinidad de elementos, dejando fuera a muy pocos</u>*. Si bien ahora podemos recordar que no sólo indica el infinitésimo, sino también una relación fundamental.

3. Proponer

El cierre de este artículo tiene que llevarnos a proponer alguna actividad para la educación matemática. Sin ánimo de hacer un artículo erudito, confieso que yo he aprendido mucho para poder redactarlo. Los aportes de las personas consultadas, las lecturas de los textos y el casar las informaciones me ha obligado a percibir cualidades que no conocía cuando me lo propuse. Sólo espero que el modelo del mismo estimule a los compañeros a indagar sobre elementos de nuestro entorno, como el mismo épsilon, trascendiendo los aspectos meramente matemáticos, para introducirnos en su repercusión en otros campos.

No puedo cerrar sin agradecer las aportaciones de Begoña Lamolda, Rafael Pérez, Fernando Hernández, Antonio Marín, y otros a los que de una manera frontal o soterrada he preguntado sobre este tema.

Las primeras propuestas didácticas que se me ocurren son de carácter cultural, como estudiar el origen de signos matemáticos. Este estudio para el épsilon nos llevar a descubrir el origen de nuestro signo del euro, por ejemplo. De él han salido numerosos términos que nos abren el trabajo hacia direcciones imprevistas: la escritura en bustrefedón nos sugiere la discontinuidad del proceso de escritura, así como los convenios sociales establecidos, pero también nos sugiere las regularidades gráficas, como las ligadas a la posición de las letras, la escritura especular que adoptan algunos niños en sus comienzos de la escritura, la dificultad de escribir con otras normas, etc. También podemos estudiar las características alfanuméricas del alfabeto griego (Comas, 2006, Jean, 1998), lo que llevaría a analizar algunos sistemas de numeración de la antigua civilización griega (Ifrah, 1997, Guedj, 1998), tanto en sus principios como en su grafía.

Propuestas gráficas podrían abarcar el dibujar el épsilon con regla y compás, o estudiar las regularidades de la escritura de la letra. Para ello podemos buscar todas las expresiones de épsilon en un tratamiento de textos, y estudiar cuál de ellos guarda más regularidades. Su relación gráfica con otros signos permite identificar reflexiones y simetrías axiales.

Fig. 13: Peliculas epsilon

Por último, y como suele ser habitual en esta sección, he recogido algunos chistes sobre épsilon. Seguro que muchos de nosotros ha utilizado el épsilon para referirse a alguien, queriendo significar que es "*Pequeño y despreciable*". El empleo de Paul Erdös es aparentemente más cariñoso, aunque nadie está seguro con los genios.

Una idea mucho más humorística es la que surge en el chiste clásico del alumno que dice: *Me di cuenta de que suspendería matemáticas cuando todos se rieron cuando el profesor dijo "sea un épsilon menor que 37"*.

Claudi Alsina y Miguel de Guzman (1996), nos recuerdan la anécdota sobre épsilon que surgió en la publicación de un artículo de Hardy y Littlewood. Los autores hablaban de una expresión "que es menor que ε, donde ε se puede hacer tan pequeño como se quiera". Los impresores tomaron esta frase como una indicación a ellos, por lo que al enviar las copias, Littlewood leyó: "que es menor que .", donde al mirar el punto con lupa pudo comprobar que se trataba de una letra épsilon.

Una historieta más sofisticada es la de la figura 13, elaborada en combinación con mi hija Marta, que es la que le ha dado forma.

Para finalizar, quiero llamarles la atención sobre los encabezamientos que vamos a utilizar para las diferentes secciones de la revista, empleando el logotipo de los epsiloncitos. Que les guste.

Bibliografía

Alsina, C. y Guzmán, M. de (1996). *Los matemáticos no son gente seria*. Barcelona, Rubes.

Bourbaki, N. (1970). *Théorie d'ensembles*. Herman, Paris,

Bochenski, J.M. (1976). *Compendio de Lógica Matemática*. Madrid, Paraninfo.

Comas, R. (2006). Notación alfanumérica griega y notaciones derivadas: uso científico-técnico. *Revista de Estudios Clásicos* 129: pp- 44-64.

Cauchy, A.L. (1821). *Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique, I.er Partie.* Edición de F. J. Pérez y J.M. Díaz, por la SAEM THALES, 1998.

Guedj, D. (1998). *El imperio de las cifras y los números*. Barcelona, Ediciones B.S.A.

Ifrah, G. (1997). *Historia universal de las cifras*. Madrid, Espasa.

Jean, G. (1998). *La escritura, memoria de la humanidad*. Barcelona, Ediciones B.S.A.

Lorenzo, J. de (1972). *Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos*. Madrid, Tecnos.

Lorenzo, J. de (1971). *Introducción al estilo matemático*. Madrid, Tecnos.

Pabón, (1972). *Diccionario manual Griego – Español.* Barcelona, Bibliograf.

Pérez Gómez, R. (1984) Editorial . *Épsilon nº 1*

Real Academia Española de la Lengua (2001). *Dicccionario de la Real Academia Española de la Lengua. Vigésima segunda edición.* Madrid, Espasa Calpe.

Seco, M. Andrés, O. y Ramos, G. (1999). *Diccionario del español actual*. Madrid, Aguilar.

http://en.wikipedia.org/wiki/Epsilon

http://guindo.pntic.mec.es/~jmag0042/escritura_uncial.pdf

http://es.wikipedia.org/wiki/Bustrofedon