

Capítulo 3

Interpolación spline

Muy frecuentemente se dispone de una gran cantidad de datos relativos a una función, conocida o no, que se desea aproximar. Las técnicas de interpolación polinómica dan lugar en general a interpolantes que presentan grandes oscilaciones. La interpolación spline desempeña un papel fundamental en el tratamiento de este tipo de problemas. En lo que sigue, nos centraremos principalmente en la interpolación spline cúbica, aunque trataremos primero brevemente la lineal y la cuadrática.

3.1 Interpolación con splines de grado uno

Como hemos indicado, los polinomios de grado elevado pueden presentar grandes oscilaciones. Ello hace que un polinomio pueda coincidir con una función en muchos puntos y que, aunque dos de ellos estén muy próximos, en puntos entre estos dos el valor del polinomio diste mucho del de la función. Incluso es posible que la distancia tienda a infinito cuando el grado del polinomio crece (el ejemplo de Runge es una buena ilustración).

Por el contrario para los polinomios de grado bajo no se dan tales oscilaciones; basta pensar en las gráficas de las rectas, las parábolas o las cúbicas, por citar los de grado más bajo, que son los de mayor interés en la construcción de las funciones spline polinómicas.

La idea de este tipo de funciones es hacer posible la construcción de espacios de funciones *suficientemente suaves* fácilmente manejables. Los más utilizados son los construidos, hablando en términos gráficos, a partir de funciones polinómicas a trozos de grado bajo que presentan cierta regularidad.

Un ejemplo sencillo es el de una función cuya gráfica la forman rectas a

trozos, es decir segmentos, sobre una partición

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

del intervalo $[a, b]$, de tal manera que el extremo final de un segmento coincide con el principio del siguiente. La gráfica que resulta es lo que conocemos como una poligonal. Obsérvese que se trata de una función continua en el intervalo total $[a, b]$, y que al restringirla al intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq n - 1$, es un polinomio de grado menor o igual que uno; además, estas dos propiedades se mantienen cuando se suman poligonales o se multiplican por escalares. Por tanto las funciones cuyas gráficas son las poligonales asociadas a la partición anterior constituyen un espacio vectorial. Este espacio vectorial es el de las funciones spline de grado uno y nodos x_1, \dots, x_n , y se nota por $S_1(x_1, \dots, x_n)$.

También se observa de inmediato que si en los nodos x_1, \dots, x_n se conocen los valores y_1, \dots, y_n que toma cierta función y se desea construir una poligonal, del tipo anterior, que pasa por ellos, el problema tiene solución y es única: su gráfica la forman los segmentos que unen los puntos resultantes: el punto (x_1, y_1) con el punto (x_2, y_2) , el (x_2, y_2) con (x_3, y_3) , etc., y su expresión analítica, $s_i(x)$, en el subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq n - 1$, es

$$s_i(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

(el último subintervalo se considera cerrado por la derecha, es decir, $[x_{n-1}, b]$).

Por tanto, el problema consistente en interpolar datos lagrangianos referidos a los nodos x_1, \dots, x_n en el espacio $S_1(x_1, \dots, x_n)$ es unisolvante (es decir, tiene solución en ese espacio vectorial y es única). Este hecho también nos indica que la dimensión de dicho espacio es n . La dimensión también se puede deducir teniendo en cuenta que cada spline es un polinomio de grado menor o igual que 1 en cada subintervalo, lo que deja dos parámetros libres para su determinación; en total, como hemos de obtener $n - 1$ polinomios, serían $2(n - 1)$ parámetros, a los que habría que restar $n - 2$ restricciones originadas al exigir la continuidad en los $n - 2$ nodos interiores, obteniendo como valor de la dimensión $2(n - 1) - (n - 2) = n$ (este resultado, obtenido a partir de un razonamiento de tipo heurístico, requiere una demostración rigurosa, pues no hemos probado que las formas lineales asociadas al problema sean linealmente independientes).

Una base del espacio $S_1(x_1, \dots, x_n)$ la constituyen las n poligonales que valen, respectivamente, 1 en un nodo y 0 en los $n - 1$ nodos restantes. Esta base es muy útil en problemas de elementos finitos (ver figura 3.1).

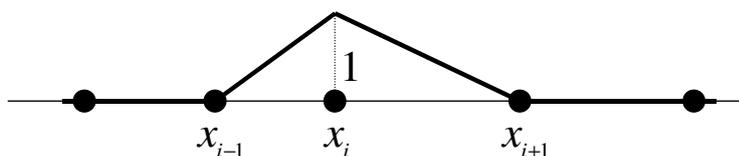


Figura 3.1: Gráfica de la función de la base de $S_1(x_1, \dots, x_n)$ correspondiente al nodo x_i .

Otra base se puede definir a partir de *potencias truncadas*. La función potencia truncada de grado m en el punto c se nota por $(x - c)_+^m$ y se define por

$$(x - c)_+^m = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c \\ (x - c)^m & \text{si } x \geq c \end{cases}$$

En la figura 3.2 se muestran las gráficas de dos de ellas.

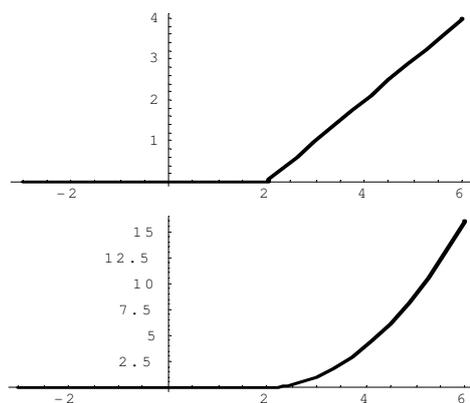


Figura 3.2: Gráficas en $[-3, 6]$ de las potencias truncadas de grados $m = 1, 2$ correspondientes a $c = 2$.

La base de $S_1(x_1, \dots, x_n)$ mediante potencias truncadas es

$$\{1, x, (x - x_2)_+, (x - x_3)_+, \dots, (x - x_{n-1})_+\}.$$

3.2 Interpolación con splines cuadráticos

Las funciones spline polinómicas de grado mayor que uno siguen una filosofía idéntica a las de grado uno, sólo que al aumentar el grado se puede conseguir mayor regularidad global, sin que cambie mucho la dimensión del espacio vectorial. Así, los splines cuadráticos con nodos x_1, \dots, x_n están constituidos por parábolas a trozos, unidas entre sí no sólo con continuidad sino también con tangente continua, de tal forma que son funciones de clase uno en el intervalo $[a, b]$. El espacio vectorial correspondiente se nota por $S_2(x_1, \dots, x_n)$. Es evidente que si se desea calcular una parábola conociendo su valor en dos puntos, por ejemplo en x_1 y x_2 , y el valor de su derivada en uno de ellos, por ejemplo en x_1 , el problema es unisolvente. Si queremos usar el spline cuadrático para interpolar datos, la siguiente parábola tendría que volver a interpolar el valor en el nodo x_2 , puede interpolar un nuevo valor de función en x_3 , pero no podemos interpolar una derivada arbitraria en uno de estos extremos, pues, para que ambas parábolas enlacen con clase uno se necesita que la nueva parábola tenga en x_2 la misma derivada que la parábola construida en el intervalo $[x_1, x_2]$. Continuando la construcción hasta el último subintervalo, observamos que el espacio $S_2(x_1, \dots, x_n)$ permite resolver un problema de interpolación con $n+1$ datos (valores en los n nodos y el valor de la derivada en uno de ellos). Nuevamente, la dimensión $n+1$ es igual al número de parábolas que hay que construir, $n-1$, por el número de parámetros de cada una, tres, menos el número de nodos interiores, $n-2$, por las restricciones en cada nodo interior, dos (coincidencia del valor y de la primera derivada).

Detallemos el *problema de interpolación lagrangiana* en $S_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, que describimos como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Encontrar } & s \in S_2(x_1, \dots, x_n) \\ \text{tal que } & s(x_i) = y_i, \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (3.1)$$

Si s_k es el polinomio cuadrático que se obtiene al restringir $s \in S_2(x_1, \dots, x_n)$ al intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, entonces $s_k(x) = \alpha_k + \beta_k(x - x_k) + \gamma_k(x - x_k)^2$, donde α_k, β_k y γ_k son constantes reales. La función s cumplirá las condiciones de interpolación $s(x_i) = y_i$, $k = 1, 2, \dots, n$, si y sólo si $s_k(x_k) = y_k$ y $s_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, condiciones equivalentes a

$$\begin{aligned} y_k &= s_k(x_k) = \alpha_k \\ y_{k+1} &= s_k(x_{k+1}) = \alpha_k + \beta_k h_k + \gamma_k h_k^2 \end{aligned}$$

donde $h_k = x_{k+1} - x_k$. Entonces

$$\begin{aligned}\alpha_k &= y_k \\ \gamma_k &= \frac{\Delta_k - \beta_k}{h_k}\end{aligned}$$

donde $\Delta_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k}$. La determinación del interpolante spline s pasa por hallar los valores β_k . Sólo resta imponer que s sea de clase $C^1([a, b])$. Pero esto está garantizado si s es derivable en los nodos interiores x_2, \dots, x_{n-1} . En definitiva, s es de clase $C^1([a, b])$ si y sólo si $s'_k(x_{k+1}) = s'_{k+1}(x_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots, n-2$, es decir, si y sólo si

$$\beta_k + 2(\Delta_k - \beta_k) = \beta_{k+1},$$

igualdades que se simplifican dando lugar a

$$\beta_k + \beta_{k+1} = 2\Delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-2. \quad (3.2)$$

Se trata de un sistema de $n-2$ ecuaciones para las incógnitas $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$, por lo que el problema (3.1) no es unisolvante en $S_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Una forma de conseguir un problema unisolvante consiste en especificar el valor de la derivada de la función spline en uno de los nodos. Si es el inicial, equivale a especificar el valor de β_1 . En cualquiera de estos casos las igualdades (3.2) permiten determinar recurrentemente los restantes valores de las incógnitas.

Otra forma de abordar el problema es elegir β_0 de modo que alguna cantidad relacionada con el spline se minimice, por ejemplo la energía o alguna aproximación de la curvatura (ver [Späth]).

El problema descrito también podría haberse expresado en términos de la base de potencias truncadas de $S_2(x_1, \dots, x_n)$, dada por

$$\left\{1, x, x^2, (x - x_2)_+^2, (x - x_3)_+^2, \dots, (x - x_{n-1})_+^2\right\}.$$

3.3 Interpolación con splines cúbicos de clase dos

De igual forma que en los casos anteriores, se puede construir un espacio formado por funciones cúbicas a trozos de clase dos. Es el espacio vectorial de los splines cúbicos, que se nota por $S_3(x_1, \dots, x_n)$. Este espacio tiene dimensión $n+2$, como indica un razonamiento similar al de los casos precedentes.

De nuevo podemos escribir una base para el mismo en función de potencias truncadas

$$\left\{ 1, x, x^2, x^3, (x - x_2)_+^3, (x - x_3)_+^3, \dots, (x - x_{n-1})_+^3 \right\}$$

Con el espacio $S_3(x_1, \dots, x_n)$ podemos interpolar valores en los n nodos y dos datos más. Cabría pensar que los dos datos restantes para la interpolación son relativos a derivadas en los extremos de uno de los subintervalos. Efectivamente esa es una posibilidad, pero no la más interesante. Los problemas de interpolación en el espacio $S_3(x_1, \dots, x_n)$ tienen sus dos datos restantes referidos a los nodos extremos a y b ; por tanto, su construcción no es tan simple como en los casos anteriores.

El *problema de interpolación lagrangiana* en $S_3(x_1, \dots, x_n)$ es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Encontrar } & s(x) \in S_3(x_1, \dots, x_n) \\ \text{tal que } & s(x_i) = y_i, \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como hemos comentado, se requieren dos condiciones adicionales; tres elecciones muy interesantes son las siguientes:

i) Caso cúbico natural

$$s''(x_1) = 0, \quad s''(x_n) = 0.$$

ii) Caso cúbico periódico

$$s'(x_1) = s'(x_n), \quad s''(x_1) = s''(x_n).$$

iii) Caso cúbico sujeto

$$s'(x_1) = y'_0, \quad s'(x_n) = y'_n,$$

Los problemas de Lagrange con las anteriores condiciones adicionales tienen n datos de interpolación comunes.

Veamos cómo se podría determinar el primero de ellos, el *spline cúbico natural* de interpolación. Mantenemos la notación empleada en el caso cuadrático. La restricción al subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$ del spline s se nota s_k y es un polinomio de grado menor o igual que tres, que debe tomar en los extremos los valores y_k e y_{k+1} , respectivamente. Si denominamos d_k y d_{k+1} a los valores (desconocidos) de la derivada primera de s en los extremos x_k y x_{k+1} , entonces s_k satisface las igualdades

$$\begin{aligned} s_k(x_k) &= y_k, \quad s_k(x_{k+1}) = y_{k+1} \\ s'_k(x_k) &= d_k, \quad s'_k(x_{k+1}) = d_{k+1} \end{aligned}$$

Se trata de un problema de interpolación polinómica de Hermite, por lo que s_k puede expresarse en términos de los polinomios de la correspondiente base de Newton: $\left\{1, x - x_k, (x - x_k)^2, (x - x_k)^2(x - x_{k+1})\right\}$. Unos cálculos elementales muestran que

$$s_k(x) = y_k + d_k(x - x_k) + \frac{1}{h_k} \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - d_k \right) (x - x_k)^2 + \frac{1}{h_k^2} \left(-2 \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} + d_{k+1} + d_k \right) (x - x_k)^2 (x - x_{k+1})$$

La función s construida a partir de las restricciones s_k , $k = 1, 2, \dots, n - 1$, interpola los valores y_k y es de clase C^1 ($[a, b]$). Sólo hay que imponer que sea de clase C^2 ($[a, b]$), lo que se consigue si lo es en los nodos interiores x_2, \dots, x_{n-1} . Pero esto equivale a que $s_k''(x_{k+1}) = s_{k+1}''(x_{k+1})$ para $k = 1, 2, \dots, n - 2$. Pero

$$s_k''(x_{k+1}) = \frac{6(y_k - y_{k+1}) + 2h_k(d_k + 2d_{k+1})}{h_k^2}$$

y

$$s_{k+1}''(x_{k+1}) = -2 \frac{3(y_{k+1} - y_{k+2}) + h_{k+1}(2d_{k+1} + d_{k+2})}{h_{k+1}^2}.$$

En definitiva, igualando ambos valores y simplificando, se tiene clase C^2 ($[a, b]$) si y sólo si

$$\frac{1}{h_k} d_k + 2 \left(\frac{1}{h_k} + \frac{1}{h_{k+1}} \right) d_{k+1} + \frac{1}{h_{k+1}} d_{k+2} = 3 \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k^2} + \frac{y_{k+2} - y_{k+1}}{h_{k+1}^2} \right),$$

para $k = 1, 2, \dots, n - 2$. Constituyen un sistema de $n - 2$ ecuaciones para n incógnitas, por lo que el problema (3.3) no es unisolvante, como ya se anunció. Son necesarias dos condiciones adicionales. En el caso cúbico natural, son $s''(a) = s''(b) = 0$, o, equivalentemente, $s_1''(x_1) = s_{n-1}''(x_n) = 0$. A partir de las expresiones de s_1 y s_{n-1} , se obtiene que la segunda derivada de s en a y b será nula si y sólo si

$$2d_1 + d_2 = 3 \frac{y_2 - y_1}{h_1}$$

$$d_{n-1} + 2d_n = 3 \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

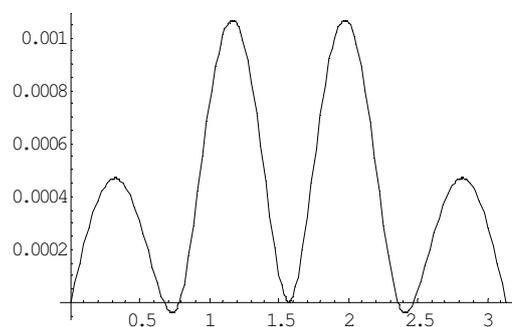


Figura 3.4: Gráfica del error de interpolación correspondiente al ejemplo de la figura (3.3).

El caso cúbico sujeto es más simple, pues las condiciones en los extremos se traducen en valores concretos de d_1 y d_n , por lo que las ecuaciones primera y última que relacionan los valores de las incógnitas se simplifican, obteniendo un sistema de orden $n - 2$ en lugar de uno de orden n .

Conocidos los valores de las derivadas del spline en cada nodo es inmediato obtener con *Mathematica* la expresión del spline en ese intervalo con la orden **InterpolatingPolynomial**.

El caso periódico, que también es unisolvente, se trata de forma análoga, aunque la matriz de coeficientes ya no es tridiagonal.

3.4 Interpolación con splines cúbicos de clase uno

Podríamos pensar en utilizar un espacio formado por cúbicas a trozos que enlazaran con continuidad y también con tangente continua pero sin exigir coincidencia de las segundas derivadas en los nodos interiores. Lo notaremos por $S_3^1(x_0, \dots, x_n)$, donde el superíndice indica la regularidad global y el subíndice el grado de los polinomios. Es de nuevo un espacio vectorial, de mayor dimensión que el anterior, que además contiene al espacio de los splines cúbicos de clase dos.

Es inmediato que con este espacio podemos interpolar, con solución única, el valor de una función y el de su derivada en cada uno de los nodos. Por tanto, la dimensión del espacio $S_3^1(x_0, \dots, x_n)$ es $2n + 2$. Además, la construcción de cada uno de los trozos se puede hacer por separado con la orden **Interpolat-**

ingPolynomial..

3.5 Propiedades extremales de los splines cúbicos

Consideremos dos funciones $s, g \in C^2([a, b])$. Entonces, se tiene que

$$\int_a^b (g'' - s'')^2 = \int_a^b (g'')^2 - \int_a^b (s'')^2 - 2 \int_a^b s'' (g'' - s''). \quad (3.4)$$

Si s'' es derivable en casi todos sus puntos, entonces se puede desarrollar por partes la última integral de la expresión anterior y se obtiene

$$\int_a^b s'' (g'' - s'') = s'' (g' - s') \Big|_a^b - \int_a^b s''' (g' - s'). \quad (3.5)$$

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores, probaremos las siguientes propiedades de tipo extremal para los splines cúbicos.

Teorema.- Supongamos que g interpola los valores y_i en los nodos x_i , para $i = 0, \dots, n$, y que s es el spline cúbico natural que interpola dichos datos. Entonces, se tiene que

$$\int_a^b (g'')^2 \geq \int_a^b (s'')^2,$$

y la igualdad se verifica si y sólo si $s(x) = g(x)$, para todo $x \in [a, b]$.

Demostración El primer miembro a la derecha del signo igual en (3.5) es nulo, por ser $s''(a) = s''(b) = 0$ (spline cúbico natural), y resulta que

$$\begin{aligned} \int_a^b s''' (g' - s') &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} s''' (g' - s') = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g' - s') \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i [g - s]_{x_i}^{x_{i+1}} = 0, \end{aligned}$$

donde α_i es el valor constante de s''' en (x_i, x_{i+1}) . Por tanto, $\int_a^b s'' (g'' - s'') = 0$ y la igualdad (3.4) se reduce a

$$\int_a^b (g'' - s'')^2 = \int_a^b (g'')^2 - \int_a^b (s'')^2,$$

y, por tanto,

$$\int_a^b (g'')^2 \geq \int_a^b (s'')^2.$$

De la continuidad de g'' y s'' se deduce que la igualdad sólo se da si $g'' - s'' = 0$, es decir, si y sólo si $g''(x) = s''(x)$, para todo $x \in [a, b]$, por lo que s y g difieren únicamente en un polinomio de grado uno. Como coinciden en al menos dos nodos, este polinomio se anula en, al menos, dos puntos y, por consiguiente es idénticamente nulo. En definitiva,

$$\int_a^b (g'')^2 = \int_a^b (s'')^2 \Leftrightarrow s(x) = g(x), \forall x \in [a, b],$$

con lo que concluye la demostración. \square

Teorema.- Supongamos que g interpola los datos y_i en los nodos x_i , para $i = 1, \dots, n$, y además los datos derivada en los extremos, y'_a e y'_b . Sea \bar{s} el spline cúbico sujeto asociado a los mismos datos. Entonces se tiene que

$$\int_a^b (g'')^2 \geq \int_a^b (\bar{s}'')^2, \quad (3.6)$$

y la igualdad se da si y sólo si $g(x) = \bar{s}(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Demostración La demostración es análoga a la del teorema precedente, teniendo en cuenta que la condición $s''(a) = s''(b) = 0$ se debe sustituir por $s'(a) = g'(a)$ y $s'(b) = g'(b)$. \square

Sean ahora u un spline cúbico cualquiera con nodos x_1, \dots, x_n , $x_0 = a$ y $x_n = b$, y f una función de clase $C^2([a, b])$. Sean $g = f - u$ y $s = \bar{s} - u$, donde \bar{s} es el spline cúbico sujeto que interpola a f .

Notemos que $s(x_i) = g(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, $s'(a) = g'(a)$ y $s'(b) = g'(b)$. Aplicando (3.6), se tiene que

$$\int_a^b (f'' - u'')^2 \geq \int_a^b (f'' - \bar{s}'')^2, \quad (3.7)$$

cumpliéndose la igualdad si y sólo si $u(x) = \bar{s}(x) + \alpha + \beta x$.

La propiedad (3.7) se puede interpretar como que, si medimos la distancia entre f y cualquier spline cúbico u mediante la expresión $\int_a^b (f'' - u'')^2$, entonces esta distancia se minimiza cuando $u(x) = \bar{s}(x)$ y para todos sus trasladados mediante un polinomio de grado uno. Por tanto, podemos decir que \bar{s} es la mejor aproximación de f en este sentido.

3.6 Estudio del error

Sean $[a, b]$ un intervalo cerrado real y $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ una partición del mismo. Sea $h = \max_{0 \leq j \leq n-1} \{x_{j+1} - x_j\}$. Sean $f \in C^2([a, b])$ y s el spline cúbico natural o sujeto que interpola a f en los nodos de la partición considerada. Entonces, el error de interpolación

$$e(x) = f(x) - s(x), \quad x \in [a, b],$$

verifica, para cada intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, que $e(x_j) = e(x_{j+1}) = 0$ y, por el teorema de Rolle, existe al menos un valor $c_j \in [x_j, x_{j+1}]$ tal que $e'(c_j) = 0$. En consecuencia,

$$\int_{c_j}^x e''(t) dt = e'(x) - e'(c_j) = e'(x), \quad \forall x \in [x_j, x_{j+1}].$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene que

$$\begin{aligned} |e'(x)|^2 &= \left| \int_{c_j}^x e''(t) \cdot 1 dt \right|^2 \leq \left| \int_{c_j}^x e''(t)^2 dt \right| \int_{c_j}^x 1^2 dt \\ &\leq \left| \int_{c_j}^x e''(t)^2 dt \right| |x - c_j| \leq h \left| \int_{c_j}^x e''(t)^2 dt \right| \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aplicando la propiedad extremal que verifica s , ya sea el spline cúbico natural o el sujeto, se verifica que

$$\int_c^x e''^2 \leq \int_a^b e''^2 = \int_a^b (f'' - s'')^2 = \int_a^b f''^2 - \int_a^b s''^2 \leq \int_a^b f''^2$$

Teniendo en cuenta (3.8), y tomando raíz cuadrada se obtiene que

$$|e'(x)| = |f'(x) - s'(x)| \leq h^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b f''^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x \in [x_j, x_{j+1}].$$

Luego la derivada del error está acotada por una expresión proporcional a $h^{\frac{1}{2}}$.

Como

$$\int_{x_j}^x e'(t) dt = e(x) - e(x_j) = e(x) - 0 = e(x),$$

se tiene que

$$|e(x)| = \left| \int_{x_j}^x e'(t) dt \right| \leq \int_{x_j}^x \max_{a \leq z \leq b} |e'(z)| dt \leq h \max_{a \leq z \leq b} |e'(z)| \leq h^{\frac{3}{2}} \left(\int_a^b f''^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$