

# Taller de Jóvenes Investigadores de la REAG 2021

*18 y 19 de Noviembre, Instituto de Matemáticas de la Universidad  
de Granada*

## **Audibility, Naturally reductive spaces and 2-step nilpotent Lie groups**

JOSÉ MANUEL FERNÁNDEZ BARROSO

Universidad de Extremadura

Among homogeneous spaces, the naturally reductive ones are well studied and classified up to dimension eight. C. Gordon proved that any naturally reductive nilmanifold is at most 2-step nilpotent, thus this kind of manifolds provided a huge number of examples of naturally reductive spaces.

The audibility problem looks for determine Riemannian properties on a manifold from the eigenvalues of the Laplace–Beltrami operator. Szabó, in 1999, constructed an isospectral pair of closed Riemannian manifolds, one of them locally homogeneous while the other does not.

In our work, we continue studying the audibility of properties related with the homogeneity and the curvature operator. We characterize the naturally reductive 2-step nilpotent Lie groups and construct a pair of isospectral closed 2-step nilpotent spaces. Finally we use the characterization to prove the inaudibility of being a naturally reductive space.

This is a joint work with Teresa Arias-Marco.

## **Desigualdades de tipo $L_p$ Brunn-Minkowski e isoperimétricas para el enumerador de puntos del retículo**

EDUARDO LUCAS MARÍN

Universidad de Murcia

La desigualdad de Brunn-Minkowski clásica en el espacio euclídeo  $n$ -dimensional afirma que el volumen (medida de Lebesgue) elevado a  $1/n$  es un funcional

cóncavo (con respecto a la suma vectorial) en la familia de conjuntos compactos. Una de sus consecuencias más remarcables es la desigualdad isoperimétrica, que puede resumirse en que las bolas euclídeas minimizan la medida de área de superficie (contenido de Minkowski) en la familia de conjuntos compactos con volumen arbitrario fijo.

Los resultados anteriores han sido ampliamente estudiados, y poseen numerosas y ricas consecuencias, versiones, generalizaciones y extensiones. Una de ellas es la extensión de la desigualdad de Brunn-Minkowski al marco  $L_p$ . En esta charla discutiremos varios análogos discretos de las desigualdades anteriormente mencionadas para el “enumerador de puntos del retículo” - un funcional discreto que mide la cantidad de puntos enteros de un conjunto - para conjuntos acotados arbitrarios del espacio euclídeo  $n$ -dimensional. Adicionalmente, veremos que estas nuevas desigualdades discretas implican sus correspondientes análogos continuos clásicos, para conjuntos compactos no vacíos.

Esta charla está basada en trabajos conjuntos con María A. Hernández Cifre, David Iglesias y Jesús Yepes Nicolás (Universidad de Murcia).

### **Estructuras de conos: de la Relatividad General a la propagación de incendios forestales**

ENRIQUE PENDÁS RECONDO  
Universidad de Murcia

En Relatividad General, es bien sabido que la propagación (infinitesimal) de los rayos de luz desde un punto forma un cono en el espacio-tiempo. Cada uno de estos conos es simétrico respecto al vértice (dado que cualquier observador mide la misma velocidad de la luz en cualquier dirección) y, por tanto, se pueden describir mediante una métrica de Lorentz. La noción de estructura de conos aparece entonces cuando relajamos esta condición de simetría y permitimos conos más generales, ahora descritos por una métrica de Lorentz-Finsler. En este contexto, el principio de Fermat sigue siendo válido, esto es, las geodésicas luminosas minimizan (localmente) el tiempo de propagación.

Este marco teórico se puede aplicar en escenarios no relativistas para describir la propagación de una onda, o de forma más general, de cualquier fenómeno físico que cumpla el principio de Huygens. En particular, la propagación de incendios forestales constituye una de las aplicaciones más sorprendentes e interesantes. En este caso, la velocidad del fuego en cada punto y dirección proporciona la estructura de conos, de forma que las trayectorias de más rápida propagación del incendio, que generan el frente del fuego, vienen dadas por las geodésicas luminosas de la correspondiente métrica de Lorentz-Finsler.

Esta charla está basada en los trabajos [JPS1,JP,JPS2], en colaboración con Miguel Ángel Javaloyes y Miguel Sánchez.

## Referencias

- [JPS1] M.A. Javaloyes, E. Pendás-Recondo and M. Sánchez. Applications of cone structures to the anisotropic rheonomic Huygens' principle. *Nonlinear Analysis* 209, 112337 (2021).
- [JP] M.A. Javaloyes and E. Pendás-Recondo. Lightlike hypersurfaces and time-minimizing geodesics in cone structures. *ArXiv e-prints*, arXiv:2109.07969 [math.DG] (2021).
- [JSP2] M.A. Javaloyes, E. Pendás-Recondo and M. Sánchez. A general model for wildfire propagation with wind and slope. *ArXiv e-prints*, arXiv: 2110.03364 [math.DG] (2021).

### Componentes conexas de representaciones de superficies no orientables en $\text{isom}(\mathbb{H}^3)$

JUAN LUIS DURÁN BATALLA

Universitat Autònoma de Barcelona

El objetivo de esta charla es calcular el número de componentes conexas de la variedad de representaciones  $\text{hom}(\pi_1(N_k), \text{isom}(\mathbb{H}^3))$ , donde  $N_k$  denota la superficie no orientable de género  $k$ . Para ello, estudiaremos las propiedades de la aplicación elevar al cuadrado en el grupo de isometrías, así como de otras aplicaciones derivadas. Finalmente, las componentes conexas de nuestra variedad de representaciones de interés vendrán determinadas por las primera y segunda clase de Stiefel-Whitney del fibrado asociado, obteniendo un total de  $2^{k+1}$  componentes conexas.

### Solitones de Ricci algebraicos como subvariedades de espacios simétricos

VÍCTOR SANMARTÍN LÓPEZ

Universidad Politécnica de Madrid

Recientemente se ha probado que un grupo de Lie simplemente conexo y con métrica de solitón de Ricci (invariante a la izquierda) puede ser embebido isométricamente en la parte resoluble (grupo abeliano más grupo nilpotente) de la descomposición de Iwasawa de un espacio simétrico de tipo no compacto. Por otra parte, los grupos de Lie nilpotentes con métrica de solitón de Ricci invariante a la izquierda (*nilsolitón*) están en correspondencia con los grupos de Lie resolubles con métrica Einstein invariante a la izquierda. De este modo, en esta charla nos centraremos en la construcción y clasificación de solitones de Ricci como subgrupos de codimensión uno de las partes resoluble y nilpotente de la descomposición de Iwasawa de un espacio simétrico de tipo no compacto.

## Desigualdades de tipo Grünbaum

FRANCISCO MARÍN SOLA  
Universidad de Murcia

Dado un conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  con volumen positivo, si  $K$  es convexo con centroide en el origen, entonces, un resultado clásico debido a Grünbaum dice que podemos encontrar una cota inferior óptima para el cociente  $\text{vol}(K^-)/\text{vol}(K)$  dependiendo únicamente de la dimensión de  $K$ , donde denotamos por  $K^-$  a la intersección de  $K$  con un semiespacio acotado por un hiperplano que pasa por el origen. En esta charla, junto a otros resultados, veremos que fijando un hiperplano  $H$ , podemos encontrar una cota inferior óptima para el cociente  $\text{vol}(K^-)/\text{vol}(K)$  dependiendo de la concavidad de la función que nos da el volumen de las secciones de  $K$  paralelas a  $H$ . Por otro lado, cuando  $K$  es convexo, esta desigualdad recupera el resultado previo debido a Grünbaum. Además, en relación a esto último, mostraremos que el caso log-cóncavo es la concavidad límite para la cual podemos esperar este tipo de generalización de la desigualdad de Grünbaum. El contenido de esta charla forma parte de un trabajo conjunto con Jesús Yepes Nicolás.

## Construyendo cotas para el primer valor propio del problema de Dirichlet en una bola geodésica usando simetrizaciones de la métrica

ERIK SARRIÓN-PEDRALVA  
Universidad de Castellón

En esta charla, veremos como transformar el tensor métrico de una variedad riemanniana en un tensor métrico rotacionalmente simétrico de modo que el área de las esferas geodésicas se preserva. Además, mostraremos una cota superior para el primer valor propio de la laplaciana para el problema de Dirichlet en bolas geodésicas de una variedad riemanniana. Esta cota superior se obtiene de la transformación del tensor métrico y observaremos que la cota coincide con el primer valor propio si, y solo si, la curvatura media de las esferas geodésicas de la variedad es una función radial para todas las esferas geodésicas contenidas en la bola donde se plantea el problema de Dirichlet. El contenido de esta charla forma parte de un trabajo conjunto con Vicente Gimeno y Vicente Palmer.

## Minimal helicoidal surfaces in the 3-sphere

ILDEFONSO CASTRO INFANTES  
Universidad de Alicante

We will study helicoidal surfaces in the sphere of dimension 3. That is, surfaces that are invariant under a helicoidal motion (the composition of a translation and a rotation) in the 3-sphere. In particular, we will study rotational spherical surfaces.

To do this, we will introduce the concept of spherical angular momentum of a curve contained in the 2-sphere  $\mathbb{S}^2$ . From this new approach, we will prove that if we prescribe the mean curvature of a helicoidal spherical surface in terms of a function that depends on the distance to the axis, we obtain a uniparametric family with that specific mean curvature function. As a first application, we will recover the classification of the rotational minimal surfaces in  $\mathbb{S}^3$ . We will also identify the surfaces that play the role of spherical helicoids and catenoids, and we will find a family of deformations by isometric surfaces that connect them, similar to what happens in  $\mathbb{R}^3$ .

These results are part of a joint work in progress with Ildefonso Castro (University of Jaén) and Jesús Castro-Infantes (University of Granada).

### A characterization of the $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenary cylinders by their asymptotic behaviour

ANTONIO LUIS MARTÍNEZ TRIVIÑO

Universidad de Granada

We establish a uniqueness result for the  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenary cylinders by their asymptotic behaviour. Well known examples of such cylinders are the grim reaper translating solitons for the mean curvature flow. For such solitons, F. Martín, J. Pérez-García, A. Savas-Halilaj and K. Smoczyk proved that, if  $\Sigma$  is a properly embedded translating soliton with locally bounded genus, and  $C^1$ -asymptotic to two vertical planes outside a cylinder, then  $\Sigma$  must coincide with some grim reaper translating soliton. In this talk, applying a strong maximum principle for elliptic operators together with a compactness result, we increase the family of  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal graphs where these types of results hold under different assumption of asymptotic behaviour.

### Esferas de Pansu-Wulff

JULIÁN POZUELO DOMÍNGUEZ

Universidad de Granada

Consideramos una norma asimétrica  $\|\cdot\|_K$  en  $\mathbb{R}^2$  inducida a un cuerpo convexo  $K \subseteq \mathbb{R}^2$ . Asociada a  $\|\cdot\|_K$  se define un funcional de perímetro  $P_K$ , que coincide con la noción de perímetro sub-Riemanniano cuando tomamos como  $K$  al disco unidad centrado en el origen de  $\mathbb{R}^2$ . Suponiendo que  $K$  tiene frontera  $C^2$  con curvatura estrictamente positiva, podemos definir una noción de curvatura media  $H_K$  para conjuntos con frontera  $C^2$  fuera del conjunto singular, mediante la fórmula de primera variación del perímetro. La condición de que  $H_K$  sea constante implica que la frontera está foliada, fuera del conjunto singular, por curvas que se obtienen

levantando traslaciones y dilataciones de  $\partial K$ . Ésto nos permitirá definir esferas  $\mathbb{S}_K$  de curvatura media constante, las esferas de Pansu-Wulff, mediante levantamientos horizontales de  $\partial K$  que parten de  $(0, 0, 0)$  hasta que se encuentran de nuevo en el eje vertical. Veremos que el interior de las esferas de Pansu-Wulff son la única solución del problema isoperimétrico sub-Finsler en un conjunto restringido de conjuntos.

### **Hipersuperficies mínimas, con frontera libre y rotacionalmente simétricas en el espacio de Schwarzschild**

DAVID MOYA HINOJOSA  
Universidad de Granada

En el contexto de la relatividad general, uno de los ingredientes fundamentales a la hora de estudiar propiedades físicas de variedades asintóticamente planas de curvatura escalar no negativa son las hipersuperficies mínimas que contienen. El objetivo de esta charla es estudiar la existencia de superficies propiamente embebidas, rotacionalmente simétricas, mínimas y con frontera libre en el espacio de Schwarzschild de dimensión  $n \geq 3$ . También se tratará el comportamiento asintótico de la familia de superficies obtenidas, que dependerá de la dimensión en la que nos encontremos.

### **Variations for submanifolds of fixed degree**

GIANMARCO GIOVANNARDI  
Universidad de Granada

The aim of this talk is to present the deformability properties of submanifolds immersed in graded manifolds that are a generalization of Carnot manifolds. We consider an area functional defined on submanifolds of fixed degree immersed into a graded manifold equipped with a Riemannian metric. Since the expression of this area depends on the degree, not all variations are admissible. It turns out that the associated variational vector fields must satisfy a system of partial differential equations of first order on the submanifold. Moreover, given a vector field solution of this system, we provide a sufficient condition that guarantees the possibility of deforming the original submanifold by variations preserving its degree. In the one-dimensional case, the integrability of compact supported vector fields depends on the surjection of the holonomy map at the endpoints. As in the case of singular curves in sub-Riemannian geometry, there are examples of isolated surfaces that cannot be deformed in any direction. This talk is based on my joint work with G. Citti and M. Ritoré.

## Convergencia de variedades con curvatura totalmente acotada

MANUEL MELLADO CUERNO  
Universidad Autónoma de Madrid

A la hora de estudiar las consecuencias topológicas de la curvatura, una de las herramientas más exitosas es la distancia de Gromov-Hausdorff, que nos permite definir convergencia de espacios métricos. En esta charla nos centraremos en el caso de convergencia de variedades con cotas en el valor absoluto de la curvatura seccional. Explicaremos brevemente alguno de los resultados principales del área (Cheeger-Gromov, Fukaya, Naber-Tian) y ciertas cuestiones abiertas que aparecen al examinar el colapso para una codimensión cualquiera surgidas a raíz del estudio de colapso con codimensión uno que hizo S. Roos en 2018.

Si el tiempo lo permite, hablaremos de la generalización de este resultado para cualquier codimensión. Introduciremos los  $k$ -width de Urysohn, un invariante métrico que mide la cercanía de un espacio  $n$  dimensional a otro  $k$  dimensional y formularemos una conjetura que extiende el resultado de Roos a codimension arbitraria.

## Geometría del haz de marcos ortonormales con la métrica del levantamiento de Wagner

HAIMER A. TREJOS  
Universidad Nacional de Colombia- Sede Bogotá

Sea  $(M, g)$  una superficie Riemanniana orientable, entre todos los haces que podemos considerar sobre  $M$  consideremos el haz de marcos ortonormales orientados positivamente, es decir el haz de todas las bases ortonormales posibles en cada espacios tangente de los puntos de  $M$  que tienen orientación positiva. Para este haz, que lo denotaremos por  $SO(M, g)$ , tenemos la propiedad especial que podemos definir una métrica  $\hat{g}$  en términos de la función curvatura Gaussiana de  $(M, g)$  y de la métrica  $g$  que la llamaremos el levantamiento de Wagner de la métrica  $g$  de  $M$  a  $SO(M, g)$ .

En esta charla estudiaremos la geometría de este haz con esta métrica, estudiando principalmente conceptos importantes tales como el grupo de isometrías, geodésicas entre otros. Al final de la charla definiremos algunos tipos especiales de superficies en este haz vectorial y daremos condiciones generales para la construcción de superficies mínimas y superficies de curvatura media constante en estos espacios.

Este es un trabajo conjunto con Edward Becerra (Universidad Nacional de Colombia- Sede Bogotá) y Mikhail Malakhaltsev (Universidad de los AndesKazan State University)