Tema 13

# Teorema de Fubini

Vamos a estudiar ahora el principal método para calcular integrales de funciones de varias variables, también llamadas *integrales múltiples*, que consiste en reducir el problema al cálculo de sucesivas integrales simples, obteniendo las que llamamos *integrales iteradas*. Para ello se usa otro teorema fundamental de la teoría de la integración, el *teorema de Fubini*, que permite precisamente expresar una integral múltiple como integral iterada. La versión de este teorema para funciones medibles positivas se conoce también como *teorema de Tonelli*, y es interesante incluso en el caso de una función característica, pues permite por ejemplo expresar el área de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ como una integral simple. De hecho, del teorema de Tonelli se deduce fácilmente la interpretación geométrica de la integral simple como un área, y análogamente, permite expresar la *integral doble* como un volumen.

## 13.1. Teorema de Tonelli

En lo que sigue, fijamos $p,q \in \mathbb{N}$, para tomar $N = p + q$. Al estudiar la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ no se prestó atención al hecho de que $\mathbb{R}^N$ es un producto cartesiano de copias de $\mathbb{R}$, salvo al definir la medida elemental de los intervalos acotados. Como consecuencia, a pesar de que $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, no conocemos ninguna relación entre la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ y las correspondientes a $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$. Ha llegado el momento de indagar en esa relación, y ello requiere una notación que indique la dimensión del espacio en el que trabajamos. Por ello a partir de ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathcal{M}_k$ a la $\sigma$-álgebra de todos los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^k$, y entonces $\lambda_k : \mathcal{M}_k \to [0, \infty]$ será la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^k$.

De hecho, para estudiar la relación que guarda $\lambda_N$ con $\lambda_p$ y $\lambda_q$, haremos de entrada un planteamiento mucho más general. Como la medida de un conjunto siempre coincide con la integral de su función característica, nos preguntamos por la relación que guarda la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ con las de $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$. También aquí conviene fijar una notación adecuada que facilite la exposición. Cada vector de $\mathbb{R}^N$ tiene la forma $(x,y)$ con $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$, por lo que siempre usaremos $x$ e $y$ como variables de integración en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ respectivamente.

Por tanto, si $A \in \mathcal{M}_p$ y $B \in \mathcal{M}_q$, para $g \in \mathcal{L}^+(A)$ o $g \in \mathcal{L}_1(A)$, y $h \in \mathcal{L}^+(B)$ o $h \in \mathcal{L}_1(B)$, las correspondientes integrales de denotarán por

$$\int_A g(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_B h(y)\,dy \tag{1}$$

En cambio en $\mathbb{R}^N$, en vez de una sola letra, usaremos el par $(x,y)$ como variable de integración, así que la integral sobre $\Omega \in \mathcal{M}_N$ de $f \in \mathcal{L}^+(\Omega)$, o bien $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, se denotará por

$$\int_\Omega f(x,y)\,d(x,y) \tag{2}$$

Por ejemplo, cuando $p = q = 1$, en $(1)$ tenemos dos integrales simples, mientras en $(2)$ aparece una *integral doble*, esto es, la integral de una función de dos variables. En lo que sigue, conviene tener siempre presente este caso particular, que no es más sencillo que el caso general, pero sí más intuitivo.

La forma de buscar una relación entre la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$, y las correspondientes a $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$, es fácil de adivinar, pues dada una función de $N$ variables, al fijar las $p$ primeras, se obtiene una función de $q$ variables, mientras que fijando las $q$ últimas, aparece una función de $p$ variables. Para concretar esta idea, por comodidad trabajamos con funciones definidas en todo $\mathbb{R}^N$, lo que no resta generalidad, como se verá más adelante.

Sea $Z$ un conjunto no vacío arbitrario, aunque sólo usaremos $Z = \mathbb{R}$ y $Z = [0,\infty]$. Dada una función $f : \mathbb{R}^N \to Z$, para cada $x \in \mathbb{R}^p$ definimos una función $f_x : \mathbb{R}^q \to Z$ escribiendo

$$f_x(y) = f(x,y) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^q$$

Suele decirse que $f_x$ es la **sección vertical** de $f$ en el punto $x$. Análogamente, fijado $y \in \mathbb{R}^q$, definimos la **sección horizontal** de $f$ en el punto $y$, que es la función $f^y : \mathbb{R}^p \to Z$ dada por

$$f^y(x) = f(x,y) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^p$$

Hablando informalmente, parece natural pensar que, para calcular la integral de $f$, usemos primero $x$ como variable de integración, para después usar $y$, o bien integremos primero en $y$ para luego hacerlo en $x$. En el primer caso, para cada $x \in \mathbb{R}^p$ deberíamos calcular la integral en $\mathbb{R}^q$ de la función $f_x$, obteniendo una función de $x$, que después integraríamos en $\mathbb{R}^p$. En el segundo caso, la integral en $\mathbb{R}^p$ de la función $f^y$ nos daría una función de $y$ que después integraríamos en $\mathbb{R}^q$. Pues bien, ambos procedimientos permiten calcular la integral de $f$, pero hay que salvar algunos obstáculos, que pasamos a explicar.

Siendo $f$ una función medible positiva, puede ocurrir que $f_x$ no lo sea para ciertos valores de $x$, o que $f^y$ no sea medible para ciertos valores de $y$. Cuando $f$ es integrable en $\mathbb{R}^N$, para ciertos valores de $x$ también puede ocurrir que $f_x$ no sea medible, o que sea medible pero no integrable, y lo mismo puede ocurrir con $f^y$. Afortunadamente, en todos los casos, los valores problemáticos forman conjuntos de medida nula, lo que permite evitarlos, para llegar a la conclusión deseada.

El resultado, para funciones integrables, fue obtenido en 1907 por el matemático italiano G. Fubini (1879-1943), universalmente reconocido por ello. La versión del teorema de Fubini para funciones medibles positivas fue publicada dos años más tarde por el matemático, también italiano, L. Tonelli (1885-1946), por lo que también se la conoce como teorema de Tonelli.

**Teorema de Tonelli.** *Si* $f : \mathbb{R}^N \to [0, \infty]$ *es una función medible positiva, se tiene:*

$(i)$ *La función* $f_x$ *es medible p.c.t.* $x \in \mathbb{R}^p$*, y análogamente,* $f^y$ *es medible p.c.t.* $y \in \mathbb{R}^q$

$(ii)$ *Las funciones* $\varphi$ *y* $\psi$*, definidas c.p.d. en* $\mathbb{R}^p$ *y* $\mathbb{R}^q$ *respectivamente, por*

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \quad \text{p.c.t. } x \in \mathbb{R}^p \qquad \text{y} \qquad \psi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \quad \text{p.c.t. } y \in \mathbb{R}^q \tag{3}$$

*son medibles y verifican que:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^q} \psi(y)\,dy \tag{4}$$

Mencionemos la nomenclatura que suele usarse en relación con el teorema anterior, así como con la versión para funciones integrables, que luego estudiaremos. Las funciones $\varphi$ y $\psi$ que aparecen en $(3)$ son las **primeras integrales** de $f$, y el teorema empieza afirmando que están definidas c.p.d. en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ respectivamente. Además, afirma que ambas son funciones medibles positivas, lo que hace que tengan sentido la segunda y la tercera de las integrales que aparecen en $(4)$, que son las que realmente nos interesan. De hecho tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \right) dx \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^q} \psi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^q} \left( \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \right) dy$$

y de ahí que a estas dos integrales se les llame **integrales iteradas** de $f$. El teorema puede por tanto resumirse diciendo que ambas integrales iteradas tienen sentido y coinciden con la integral de $f$, es decir, se verifica la igualdad $(4)$, que puede escribirse en la forma

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left( \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \right) dy \tag{5}$$

A la hora de probar el teorema anterior, conviene tener presente la simetría de la situación. Basta probar las afirmaciones referentes a la función $\varphi$, con lo que, por simetría, también son ciertas las referentes a $\psi$.

Como hemos hecho otras veces, razonaremos en varias etapas, empezando por el caso más sencillo, para ir generalizando el resultado hasta llegar al caso general. Consideramos por tanto la familia $\mathcal{F}$ formada por las funciones que verifican todas las afirmaciones del teorema. Más concretamente, para $f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^N)$ escribimos $f \in \mathcal{F}$ cuando $f_x \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^q)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^p$, la función $\varphi$ definida en $(3)$ es medible y su integral en $\mathbb{R}^p$ coincide con la de $f$ en $\mathbb{R}^N$.

Como en otras ocasiones, la familia $\mathcal{F}$ tiene dos propiedades de estabilidad, que juegan un papel clave. La primera se deduce rutinariamente de propiedades muy básicas de la integral.

- *Si* $f, g \in \mathcal{F}$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$*, entonces* $\alpha f + g \in \mathcal{F}$.

Escribiendo $h = \alpha f + g$ es evidente que $h_x = \alpha f_x + g_x$ para todo $x \in \mathbb{R}^p$. Como $f_x$ y $g_x$ son medibles p.c.t. $x \in \mathbb{R}^p$, deducimos que $h_x$ es medible p.c.t. $x \in \mathbb{R}^p$. Tenemos ahora tres funciones $\varphi_f$, $\varphi_g$ y $\varphi_h$ definidas p.c.t. $x \in \mathbb{R}^p$, escribiendo

$$\varphi_f(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy\,, \quad \varphi_g(x) = \int_{\mathbb{R}^q} g(x,y)\,dy\,, \quad \varphi_h(x) = \int_{\mathbb{R}^q} h(x,y)\,dy$$

Las propiedades básicas de la integral nos dicen que, para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$ se tiene

$$\varphi_h(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \big(\alpha f(x,y) + g(x,y)\big)\, dy = \alpha \varphi_f(x) + \varphi_g(x)$$

Como por hipótesis $\varphi_f$ y $\varphi_g$ son funciones medibles, tenemos que $\alpha\varphi_f + \varphi_g$ es medible, pero esta función coincide c.p.d. con $\varphi_h$, de donde deducimos que $\varphi_h$ es medible. Finalmente, usando de nuevo que $\varphi_h = \alpha\varphi_f + \varphi_g$ c.p.d. y que $f, g \in \mathcal{F}$, concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_h(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^p} \big(\alpha\varphi_f(x) + \varphi_g(x)\big)\, dx = \alpha \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_f(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_g(x)\, dx \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\, d(x,y) + \int_{\mathbb{R}^N} g(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^N} h(x,y)\, d(x,y) \end{aligned}$$

Esto prueba que $h \in \mathcal{F}$ como se quería. ■

El teorema de la convergencia monótona nos permitirá ahora probar que la familia $\mathcal{F}$ es estable por límites puntuales de sucesiones crecientes.

- *Sea $f_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y supongamos que la sucesión $\{f_n\}$ es creciente. Definiendo entonces $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, se tiene que $f \in \mathcal{F}$.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $B_n \subset \mathbb{R}^q$, con $\lambda_q(\mathbb{R}^q \setminus B_n) = 0$, tal que la sección vertical $(f_n)_x$ es medible, para todo $x \in B_n$. Tomando $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, es claro que $\lambda_q(\mathbb{R}^q \setminus B) = 0$ y, fijado $x \in B$, tenemos que $(f_n)_x$ es medible para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero es evidente que la sucesión $\big\{(f_n)_x\big\}$ converge puntualmente a $f_x$ en $\mathbb{R}^q$. Por tanto, $f_x$ es medible para todo $x \in B$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos ahora la primera integral de $f_n$, y la extendemos para tenerla definida en todo $\mathbb{R}^p$. Concretamente, escribimos

$$\varphi_n(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_n(x,y)\, dy \quad \forall x \in B \qquad \text{y} \qquad \varphi_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^p \setminus B$$

Hacemos lo mismo con la primera integral de $f$, es decir, definimos

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dy \quad \forall x \in B \qquad \text{y} \qquad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^p \setminus B$$

Para cada $x \in B$, como $\big\{(f_n)_x\big\} \nearrow f_x$, el teorema de la convergencia monótona, para la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^q$, nos dice que $\{\varphi_n(x)\} \nearrow \varphi(x)$, cosa que es obvia para $x \in \mathbb{R}^p \setminus B$. Como por hipótesis $\varphi_n$ es medible para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que $\varphi$ es medible, por ser el límite puntual de una sucesión de funciones medibles. Podemos ahora escribir:

$$\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\, d(x,y)$$

La primera igualdad se deduce del teorema de la convergencia monótona para la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^q$, ya que $\{\varphi_n\} \nearrow \varphi$. Para la segunda igualdad hemos usado que $f_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente la tercera igualdad también se deduce del teorema de la convergencia monótona, ahora para la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$, puesto que $\{f_n\} \nearrow f$. De esta forma, hemos probado que $f \in \mathcal{F}$, como se quería. ■

## 13.2. Caso de una función característica

En vista de las dos propiedades de estabilidad que tiene la familia $\mathcal{F}$, para probar el teorema de Tonelli, bastará considerar el caso en que $f = \chi_E$ es la función característica de un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^N$. En efecto, de $\chi_E \in \mathcal{F}$ para todo $E \in \mathcal{M}_N$, usando sumas y productos por escalares no negativos, obtenemos que $s \in \mathcal{F}$ para toda función simple positiva $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$. Pero dada $f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^N)$, el teorema de aproximación de Lebesgue nos proporciona una sucesión creciente $\{s_n\}$ de funciones simples positivas que converge puntualmente a $f$ en $\mathbb{R}^N$. De $s_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{s_n\} \nearrow f$, deducimos que $f \in \mathcal{F}$. Esto prueba que $\mathcal{F} = \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^N)$, que es lo que afirma el teorema de Tonelli.

Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$, pensemos ahora lo que debe ocurrir para que se tenga $\chi_E \in \mathcal{F}$. Fijado $x \in \mathbb{R}^p$, la sección vertical $(\chi_E)_x$ es la función característica del conjunto dado por

$$E_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^q \, : \, (x,y) \in E \right\} \subset \mathbb{R}^q$$

Es natural decir que $E_x$ es la **sección vertical** de $E$ en el punto $x$. Análogamente, dado $y \in \mathbb{R}^q$, la **sección horizontal** de $E$ en el punto $y$ es el conjunto $E^y = \left\{ x \in \mathbb{R}^p \, : \, (x,y) \in E \right\} \subset \mathbb{R}^p$. En principio cabría pensar que todas las secciones de conjuntos medibles son conjuntos medibles, pero no es así, como vamos a comprobar con un ejemplo bien sencillo.

Dados $a \in \mathbb{R}^p$ y un conjunto no medible $W \subset \mathbb{R}^q$, sea $E = \{a\} \times W \subset \{a\} \times \mathbb{R}^q = Y$. Es claro que $\lambda_N(Y) = 0$, pues $Y$ es una intersección de hiperplanos afines en $\mathbb{R}^N$. Por tanto, tenemos $E \in \mathcal{M}_N$, pero la sección vertical $E_a = W$ no es medible. Esto no contradice al teorema de Tonelli, pues para todo $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{a\}$ se tiene que $E_x = \emptyset$ sí es un conjunto medible.

Así pues, en el caso $f = \chi_E$ con $E \in \mathcal{M}_N$, el teorema de Tonelli empieza afirmando que casi todas las secciones de $E$ son medibles: $E_x \in \mathcal{M}_q$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^p$ y $E^y \in \mathcal{M}_p$ p.c.t. $y \in \mathbb{R}^q$. Una de las primeras integrales de $\chi_E$ es la función $\varphi$, definida c.p.d. en $\mathbb{R}^p$ escribiendo

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} (\chi_E)_x = \int_{\mathbb{R}^q} \chi_{E_x} = \lambda_p(E_x) \qquad \text{p.c.t. } x \in \mathbb{R}^p$$

Análogamente, la otra viene dada por $\psi(y) = \lambda_p(E^y)$ p.c.t. $y \in \mathbb{R}^q$. El teorema afirma que $\varphi$ y $\psi$ son medibles, con lo que las integrales iteradas de $\chi_E$ vienen dadas por:

$$\int_{\mathbb{R}_p} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(E_x)\, dx \qquad \text{y} \qquad \int_{\mathbb{R}_q} \psi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda_p(E^y)\, dy$$

Finalmente, como la integral de $\chi_E$ en $\mathbb{R}^N$ es $\lambda_N(E)$, el teorema nos da la siguiente igualdad

$$\lambda_N(E) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(E_x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda_q(E^y)\, dy$$

Esta es la igualdad clave que relaciona la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ con las de $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$. Por ejemplo, en el caso $p = q = 1$ permite calcular el área de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ mediante una integral simple, y más adelante nos llevará a la interpretación geométrica de la integral simple como un área o de la integral doble como un volumen.

Como puede verse, el caso particular del teorema de Tonelli que estamos considerando, tiene interés en sí mismo, por lo que merece la pena enunciarlo expresamente. Recordemos además que la demostración del teorema general se ha reducido a comprobar este caso.

**Teorema.** *Para todo conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^N$ se tiene:*

$(i)$ *La sección vertical $E_x \subset \mathbb{R}^q$ es medible p.c.t. $x \in \mathbb{R}^p$ y la sección horizontal $E^y \subset \mathbb{R}^p$ es medible p.c.t. $y \in \mathbb{R}^q$*

$(ii)$ *Las funciones $x \mapsto \lambda_q(E_x)$ e $y \mapsto \lambda_p(E^y)$, definidas c.p.d. en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ respectivamente, son medibles y se verifica que*

$$\lambda_N(E) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda_p(E^y)\, dy \tag{6}$$

**Demostración.** Con la notación que veníamos usando, los conjuntos que verifican todas las afirmaciones del enunciado forman la familia

$$\mathcal{E} = \left\{ E \in \mathcal{M}_N \,:\, \chi_E \in \mathcal{F} \right\}$$

Se trata de probar que $\mathcal{E} = \mathcal{M}_N$, cosa que haremos en varias etapas. Para ello, observamos cómo se reflejan en $\mathcal{E}$ las propiedades de estabilidad que tiene la familia de funciones $\mathcal{F}$.

Si $C = A \uplus B \subset \mathbb{R}^N$, se tiene $\chi_C = \chi_A + \chi_B$, luego de $A, B \in \mathcal{E}$ se deduce que $C \in \mathcal{E}$. Mediante una obvia inducción, deducimos que $\mathcal{E}$ es estable por uniones finitas de conjuntos dos a dos disjuntos. Por otra parte, si $\{E_n\}$ es una sucesión creciente de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, con $\{E_n\} \nearrow E$, se tiene claramente que $\left\{ \chi_{E_n} \right\} \nearrow \chi_E$, luego de $E_n \in \mathcal{E}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se deduce que $E \in \mathcal{E}$. Así pues, $\mathcal{E}$ es estable por uniones numerables crecientes. Encadenando las dos observaciones anteriores, deducimos que $\mathcal{E}$ es estable por uniones numerables de conjuntos dos a dos disjuntos. Veamos uno por uno los pasos que nos llevarán a probar que $\mathcal{E} = \mathcal{M}_N$.

**(a)** *Se tiene $H \in \mathcal{E}$ para todo intervalo acotado $H \subset \mathbb{R}^N$.*

Escribimos $H = I \times J$, donde $I \subset \mathbb{R}^p$ y $J \subset \mathbb{R}^q$ también son intervalos acotados. Para $x \in I$ se tiene $H_x = J$ mientras que $H_x = \emptyset$ para todo $x \in \mathbb{R}^p \setminus I$. Vemos por tanto que $H_x \in \mathcal{M}_q$ para todo $x \in \mathbb{R}^p$. Además tenemos $\lambda_q(H_x) = \lambda_q(J)$ para $x \in I$, pero $\lambda_q(H_x) = 0$ para $x \in \mathbb{R}^p \setminus I$, luego la función $x \mapsto \lambda_q(H_x)$ coincide con $\lambda_q(J)\chi_I$, que obviamente es medible con

$$\int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(H_x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(J)\,\chi_I(x)\, dx = \lambda_q(J)\,\lambda_p(I) = \lambda_N(H)$$

La última igualdad es la obvia relación entre las medidas elementales de los intervalos acotados en $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$. Esto prueba que $H \in \mathcal{E}$, como se quería.

**(b)** *Se tiene $G \in \mathcal{E}$ para todo abierto $G \subset \mathbb{R}^N$.*

Podemos escribir $G = \biguplus_{n=1}^{\infty} H_n$ donde $\{H_n\}$ es una sucesión de intervalos diádicos. Usando **(a)** tenemos $H_n \in \mathcal{E}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde se deduce que $G \in \mathcal{E}$.

**(c)** *Si $D$ es un conjunto de tipo $G_\delta$ en $\mathbb{R}^N$, entonces $D \in \mathcal{E}$.*

Empezamos suponiendo que $D \subset G$ para un conjunto abierto y acotado $G \subset \mathbb{R}^N$. Por otra parte, tenemos $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ donde $\{A_n\}$ es una sucesión de abiertos de $\mathbb{R}^N$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $G_n = \big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\big) \bigcap G$, con lo que $G_n$ es un abierto acotado y tenemos $\{G_n\} \searrow D$. En vista de **(b)** sabemos que $G_n \in \mathcal{E}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto $B_n \subset \mathbb{R}^p$, verificando que $\lambda_p(\mathbb{R}^p \setminus B_n) = 0$, tal que la sección vertical $(G_n)_x$ es medible, para todo $x \in B_n$. Si $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, tenemos $\lambda_p(\mathbb{R}^p \setminus B) = 0$, y para cada $x \in B$ se tiene que $(G_n)_x$ es medible para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\big\{(G_n)_x\big\} \searrow D_x$ para todo $x \in \mathbb{R}^p$, deducimos que $D_x$ es medible, para todo $x \in B$, luego p.c.t. $x \in \mathbb{R}^p$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in B$ tenemos $\lambda_q\big((G_n)_x\big) < \infty$ ya que el conjunto $(G_n)_x$ está acotado, por estarlo $G_n$. Esto permite definir una función $\varphi_n : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_0^+$ escribiendo

$$\varphi_n(x) = \lambda_q\big((G_n)_x\big) \quad \forall x \in B \qquad \text{y} \qquad \varphi_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^p \setminus B$$

y análogamente, como $D$ también está acotado, definimos $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_0^+$ escribiendo

$$\varphi(x) = \lambda_q(D_x) \quad \forall x \in B \qquad \text{y} \qquad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^p \setminus B$$

Fijado $x \in B$, tenemos $\big\{(G_n)_x\big\} \searrow D_x$, luego podemos usar la continuidad decreciente de la medida $\lambda_q$ para obtener que $\big\{\varphi_n(x)\big\} \searrow \varphi(x)$, cosa que es evidente para $x \in \mathbb{R}^p \setminus B$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, por ser $G_n \in \mathcal{E}$, sabemos que $\varphi_n$ es medible, luego $\varphi$ también lo es, como límite puntual de una sucesión de funciones medibles.

Observamos ahora que $\varphi_1 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p)$, pues por ser $G_1 \in \mathcal{E}$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^p} \varphi_1(x)\, dx = \lambda_N(G_1) < \infty$$

Como $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \varphi_1(x)$ para cualesquiera $x \in \mathbb{R}^p$ y $n \in \mathbb{N}$, podemos usar el teorema de la convergencia dominada. Teniendo en cuenta que $G_n \in \mathcal{E}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \lambda_N(G_n) = \lambda_N(D)$$

Para la última igualdad hemos usado la continuidad decreciente de la medida $\lambda_N$, teniendo en cuenta que $\{G_n\} \searrow D$ y $\lambda_N(G_1) < \infty$.

En general, si $D$ es un conjunto de tipo $G_\delta$ en $\mathbb{R}^N$, que ya no tiene que estar contenido en un abierto acotado, escribimos $\{D \cap G_n\} \nearrow D$ donde $\{G_n\}$ es cualquier sucesión de abiertos acotados, con $\{G_n\} \nearrow \mathbb{R}^N$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $D \cap G_n$ también es de tipo $G_\delta$ y está contenido en el abierto acotado $G_n$. Por lo ya demostrado, tenemos $D \cap G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $D \in \mathcal{E}$, como se quería.

**(d)** *Si $A$ es un conjunto de tipo $F_\sigma$ en $\mathbb{R}^N$, entonces $A \in \mathcal{E}$.*

Observamos en primer lugar que todo subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^N$ es de tipo $G_\delta$, lo que de hecho es cierto en cualquier espacio métrico. Dado un conjunto cerrado $C \subset \mathbb{R}^N$, consideramos la función $z \mapsto d(z,C) = \text{ínf}\{d(z,c) : c \in C\}$ donde $d$ es cualquier distancia en $\mathbb{R}^N$ que genere la topología usual. Es sabido que dicha función es continua y se tiene

$$C = \{z \in \mathbb{R}^N : d(z,C) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{R}^N : d(z,C) < 1/n\}$$

La igualdad anterior muestra $C$ como intersección numerable de conjuntos abiertos. Así pues, como consecuencia de **(c)**, tenemos $C \in \mathcal{E}$ para todo conjunto cerrado $C \subset \mathbb{R}^N$.

Si ahora $A$ es un conjunto de tipo $F_\sigma$ en $\mathbb{R}^N$, tenemos claramente $\{C_n\} \nearrow A$ donde $\{C_n\}$ es una sucesión de conjuntos cerrados. De $C_n \in \mathcal{E}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que $A \in \mathcal{E}$.

**(e)** *Si $Z \subset \mathbb{R}^N$ verifica que $\lambda_N(Z) = 0$, entonces $Z \in \mathcal{E}$.*

Tenemos $Z \subset D$ donde $D$ es un conjunto de tipo $G_\delta$ en $\mathbb{R}^N$ con $\lambda_N(D) = 0$. En virtud de **(c)** sabemos que $D \in \mathcal{E}$, con lo que se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(D_x)\,dx = \lambda_N(D) = 0$$

Por tanto, $\lambda_q(D_x) = 0$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^p$, pero es claro que $Z_x \subset D_x$ para todo $x \in \mathbb{R}^p$, luego tenemos que $Z_x \in \mathcal{M}_q$ con $\lambda_q(Z_x) = 0$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^p$. Así pues, la función $x \mapsto \lambda_q(Z_x)$ es nula c.p.d., luego es medible y se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(Z_x)\,dx = 0 = \lambda_N(Z)$$

Esto prueba que $Z \in \mathcal{E}$ como se quería.

Finalmente, dado un conjunto $E \in \mathcal{M}_N$ arbitrario, podemos escribir $E = A \uplus Z$ donde $A$ es un conjunto de tipo $F_\sigma$ y $\lambda_N(Z) = 0$. En vista de **(d)** y **(e)** tenemos $A, Z \in \mathcal{E}$, luego $E \in \mathcal{E}$.

Así pues tenemos $\mathcal{E} = \mathcal{M}_N$ lo que concluye la demostración del presente teorema, y por tanto la del teorema de Tonelli. ■

Como ya se ha dicho, la igualdad $(6)$ pone de manifiesto la relación que guarda la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ con las de $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$. Como ejemplo ilustrativo del teorema anterior, probamos ahora muy fácilmente un hecho muy natural, que hasta ahora no habíamos mencionado:

- *Para cualesquiera $A \in \mathcal{M}_p$ y $B \in \mathcal{M}_q$ se tiene que $A \times B \in \mathcal{M}_N$ con*

$$\lambda_N(A \times B) = \lambda_p(A)\,\lambda_q(B) \tag{7}$$

Suponiendo por ahora que $A \times B \in \mathcal{M}_N$, probaremos la igualdad $(7)$. Se tiene $(A \times B)_x = B$ para todo $x \in A$, mientras que $(A \times B)_x = \emptyset$ para todo $x \in \mathbb{R}^p \setminus A$. Por tanto, todas las secciones verticales de $A \times B$ son medibles, y tenemos $\lambda_q\big((A \times B)_x\big) = \chi_A(x)\,\lambda_q(B)$ para todo $x \in \mathbb{R}^p$.

Por tanto la función $x \mapsto \lambda_q\big((A\times B)_x\big)$ coincide con $\lambda_q(B)\chi_A$, que ciertamente es medible, pero el teorema anterior nos dice que

$$\lambda_N\big(A\times B\big) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q\big((A\times B)_x\big)\,dx = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(B)\chi_A(x)\,dx = \lambda_p(A)\,\lambda_q(B)$$

Escribimos ahora $A_1 \subset A \subset A_2$ y $B_1 \subset B \subset B_2$, donde $A_1, B_1$ son conjuntos de tipo $F_\sigma$ mientras que $A_2, B_2$ son de tipo $G_\delta$, verificando que $\lambda_p(A_2 \setminus A_1) = \lambda_q(B_2 \setminus B_1) = 0$. Es claro entonces que $A_2 \setminus A_1$ es de tipo $G_\delta$ de donde se deduce que $(A_2 \setminus A_1) \times B_2$ también lo es, y en particular es medible. Por lo ya demostrado, tenemos

$$\lambda_N\big((A_2 \setminus A_1)\times B_2\big) = \lambda_p(A_2 \setminus A_1)\,\lambda_q(B_2) = 0$$

Análogamente, vemos que $\lambda_N\big(A_2 \times (B_2 \setminus B_1)\big) = 0$. Teniendo ahora en cuenta que

$$(A\times B)\setminus(A_1\times B_1) \subset (A_2\times B_2)\setminus(A_1\times B_1) = \big[(A_2\setminus A_1)\times B_2\big] \cup \big[A_2\times(B_2\setminus B_1)\big]$$

vemos que $(A\times B)\setminus(A_1\times B_1)$ es un conjunto de medida nula, pero $A_1 \times B_1$ es de tipo $F_\sigma$, luego $A\times B$ es medible, como unión de un conjunto de tipo $F_\sigma$ con otro de medida nula. ■

Resaltamos que la igualdad (7) es cierta, aunque sea por ejemplo $\lambda_p(A) = 0$ y $\lambda_q(B) = \infty$, en cuyo caso se tiene por supuesto $\lambda_N(A\times B) = 0$. Usando este resultado observaremos que, lo que sabemos sobre las secciones de un conjunto medible, es lo mejor que se puede afirmar. Concretamente, sea $Z$ un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^p$ con $\lambda_p(Z) = 0$ y $W$ un subconjunto no medible de $\mathbb{R}^q$. El resultado anterior nos dice que $Z\times\mathbb{R}^q$ es medible con $\lambda_N(Z\times\mathbb{R}^p) = 0$, luego $Z\times W$ también es medible con $\lambda_N(Z\times W) = 0$. Sin embargo, para todo $x\in Z$ se tiene que $(Z\times W)_x = W$ no es medible. Como $Z$ era arbitrario, está claro que, sobre las secciones verticales de un conjunto medible $E\in\mathcal{M}_N$, sólo se puede afirmar que $E_x\in\mathcal{M}_q$ p.c.t. $x\in\mathbb{R}^p$.

## 13.3. Teorema de Fubini

El teorema de Tonelli se utiliza principalmente como criterio de integrabilidad. Dada una función medible $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, el teorema se puede aplicar a la función medible positiva $|f|$, obteniendo que ambas integrales iteradas de dicha función tienen sentido y se verifica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x,y)|\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}|f(x,y)|\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p}|f(x,y)|\,dx\right)dy$$

Por tanto, $f$ será integrable en $\mathbb{R}^N$ si, y sólo si, cualquiera de las dos integrales iteradas de la función $|f|$ es finita:

- *Una función medible $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ es integrable en $\mathbb{R}^N$, si, y sólo si, verifica que:*

$$\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}|f(x,y)|\,dy\right)dx < \infty, \quad \textit{o bien,} \quad \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p}|f(x,y)|\,dx\right)dy < \infty$$

Pero lo que ahora realmente nos interesa es comprobar que, supuesto que $f$ sea integrable en $\mathbb{R}^N$, su integral pueda calcularse también usando sus integrales iteradas. Eso es precisamente lo que afirma el siguiente teorema:

**Teorema de Fubini.** *Para toda función* $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ *se tiene:*

$(i)$ $f_x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q)$ *p.c.t.* $x \in \mathbb{R}^p$ *y* $f^y \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p)$ *p.c.t.* $y \in \mathbb{R}^q$

$(ii)$ *Las funciones* $\varphi$ *y* $\psi$*, definidas c.p.d. en* $\mathbb{R}^p$ *y* $\mathbb{R}^q$ *respectivamente, por*

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \quad \text{p.c.t. } x \in \mathbb{R}^p \qquad \text{y} \qquad \psi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \quad \text{p.c.t. } y \in \mathbb{R}^q$$

*verifican que* $\varphi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p)$ *y* $\psi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q)$ *con:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^q} \psi(y)\,dy$$

**Demostración.** Igual que ocurría con el teorema de Tonelli, basta probar las afirmaciones referentes a las secciones verticales de $f$ y a la función $\varphi$. Por simetría, se verifican el resto de las afirmaciones del teorema.

Para $x \in \mathbb{R}^p$ se tiene claramente que $f_x = \big(f^+\big)_x - \big(f^-\big)_x$. Como ya sabemos que $\big(f^+\big)_x$ y $\big(f^-\big)_x$ son medibles p.c.t. $x \in \mathbb{R}^p$ deducimos que $f_x$ también es medible p.c.t. $x \in \mathbb{R}^p$. Pero además, usando de nuevo el teorema de Tonelli, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}_q} |f(x,y)|\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x,y)|\,d(x,y) < \infty$$

de donde deducimos que

$$\int_{\mathbb{R}^p} |f_x(y)|\,dy < \infty \qquad \text{p.c.t. } x \in \mathbb{R}^p$$

Esto prueba que $f_x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^p$ como se afirma en $(i)$.

Consideremos ahora la funciones $\varphi_1$ y $\varphi_2$ definidas p.c.t. $x \in \mathbb{R}^p$ por

$$\varphi_1(x) = \int_{\mathbb{R}^p} f^+(x,y)\,dx \qquad \text{y} \qquad \varphi_2(x) = \int_{\mathbb{R}^p} f^-(x,y)\,dx$$

El teorema de Tonelli nos dice que

$$\int_{\mathbb{R}^p} \varphi_1(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f^+(x,y)\,d(x,y) < \infty \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_2(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f^-(x,y)\,d(x,y) < \infty$$

de modo que $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p)$. Como $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^p$, deducimos que también $\varphi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p)$, y se verifica que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^p} \big(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\big)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \big(f^+(x,y) - f^-(x,y)\big)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,d(x,y)\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. ■

Como ya se dijo, con el teorema anterior usamos la misma nomenclatura que con el de Tonelli. Las funciones $\varphi$ y $\psi$ son las **primeras integrales** de $f$. El teorema afirma que están definidas c.p.d. en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ respectivamente, que ambas son funciones integrables y sus integrales, que son las **integrales iteradas** de $f$, coinciden con la integral de $f$ en $\mathbb{R}^N$. Todo ello se resume de nuevo en la igualdad $(5)$.

Es importante resaltar que el teorema anterior permite calcular la integral de una función de la que sabemos que es integrable, pero no sirve para probar que una función es integrable. Más concretamente, para una función no integrable, las dos integrales iteradas pueden existir, e incluso ser iguales.

En el caso $p = q = 1$, consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad f(0,0) = 0$$

Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vemos que $f_x$ es una función racional con denominador de grado $4$ y numerador de grado $1$ luego es integrable en $\mathbb{R}$, pero además, $f_x$ es una función impar, luego su integral se anula. Esto también es cierto para $x = 0$, pues entonces la sección vertical $f_0$ es idénticamente nula. Así pues, se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,, \qquad \text{luego} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \right) dx = 0$$

Como $f(x,y) = f(y,x)$ para cualesquiera $x,y \in \mathbb{R}$, la otra integral iterada de $f$ también se anula. Así pues, ambas integrales iteradas de $f$ existen y coinciden, pero vamos a comprobar que $f$ no es integrable en $\mathbb{R}^2$. Para $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|\,dy &= |x| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y|\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 2|x| \int_0^{+\infty} \frac{y\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= 2|x| \left[ -\frac{1}{2\,(x^2+y^2)} \right]_0^{+\infty} = \frac{|x|}{x^2} = \frac{1}{|x|} \end{aligned}$$

Como la función $x \mapsto 1/x$ no es integrable en $\mathbb{R}^+$, deducimos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|\,dy \right) dx = \infty$$

y el teorema de Tonelli nos dice que $f$ no es integrable en $\mathbb{R}^2$.

Antes de considerar los principales casos particulares de los resultados anteriores, conviene aclarar que, al trabajar con funciones definidas en todo $\mathbb{R}^N$, no hemos perdido generalidad.

Si $\Omega$ es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$, toda función $f : \Omega \to [0,\infty]$, o bien $f : \Omega \to \mathbb{R}$, tiene una extensión $F$ dada por

$$F(x,y) = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega \qquad \text{y} \qquad F(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$$

Para un abierto $U$, de $[0,\infty]$ o de $\mathbb{R}$ según el caso, se tiene que $F^{-1}(U) = f^{-1}(U) \bigcup (\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$ si $0 \in U$, mientras que $F^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ cuando $0 \notin U$.

Por tanto, si $f \in \mathcal{L}^+(\Omega)$ se tiene $F \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^N)$, y es claro que la integral de $f$ sobre $\Omega$ coincide con la de $F$ sobre $\mathbb{R}^N$, lo que permite usar el teorema de Tonelli.

Del mismo modo, para $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ tenemos $F \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ y eso permite usar el teorema de Fubini para calcular la integral de $F$ en $\mathbb{R}^N$, que coincide con la de $f$ en $\Omega$. Concretaremos mejor este procedimiento en los casos particulares que más nos interesan.

## 13.4. Interpretación geométrica de la integral

Suponemos conocido, para funciones de una variable, que la integral de Riemann de una función positiva se "interpreta" como el área de la región comprendida entre el eje de abscisas y la gráfica de la función. Como consecuencia del teorema de Tonelli, podemos convertir esta idea intuitiva en una rigurosa igualdad, que también es válida para funciones medibles positivas. De hecho, con el mismo razonamiento, podemos expresar una integral doble como un volumen en $\mathbb{R}^3$, y en general, una integral en $\mathbb{R}^p$ como una medida en $\mathbb{R}^{p+1}$.

Dado un conjunto no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ y una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, recordemos que la **gráfica** de $f$ es el subconjunto de $\mathbb{R}^{p+1}$ definido por

$$Gr(f) = \big\{ \big(x, f(x)\big) \,:\, x \in \Omega \big\}$$

Cuando $f(\Omega) \subset \mathbb{R}_0^+$, definimos la **subgráfica** de $f$ como el conjunto

$$Sg(f) = \big\{ (x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} \,:\, 0 < y < f(x) \big\} \subset \mathbb{R}^{p+1} \tag{8}$$

Geométricamente, tomando si se quiere $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^p \setminus \Omega$, vemos que $Sg(f)$ es la región comprendida entre el hiperplano $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ y la gráfica de $f$. Pues bien, usando el teorema de Tonelli con $q = 1$, obtenemos el siguiente resultado:

- *Si $\Omega$ es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^p$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ una función medible, entonces la subgráfica de $f$ es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^{p+1}$ y se verifica que*

$$\lambda_{p+1}\big(Sg(f)\big) = \int_\Omega f(x)\,dx \tag{9}$$

Sean $\varphi, \psi : \Omega \times \mathbb{R}$ las funciones dadas por $\varphi(x,y) = f(x)$ y $\psi(x,y) = f(x) - y$, para todo $(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Para un abierto $H \subset \mathbb{R}$, vemos que $\varphi^{-1}(H) = f^{-1}(H) \times \mathbb{R}$ es medible, como producto cartesiano de conjuntos medibles, luego la función $\varphi$ es medible. Además, la proyección $(x,y) \mapsto y$ es continua, luego $\psi$ es medible, como diferencia de dos funciones medibles. Por tanto,

$$Sg(f) = \big(\Omega \times \mathbb{R}^+\big) \bigcap \psi^{-1}(\mathbb{R}^+)$$

es medible, como intersección de dos conjuntos medibles.

Para probar la igualdad (9) observamos las secciones verticales de $Sg(f)$:

$$\big(Sg(f)\big)_x = ]\,0\,,\, f(x)\,[ \quad \forall x \in \Omega \qquad \text{y} \qquad \big(Sg(f)\big)_x = \emptyset \quad \forall x \in \mathbb{R}^p \setminus \Omega$$

Todas estas secciones son subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$, pero lo importante es que

$$\lambda_1\big(Sg(f)_x\big) = f(x) \quad \forall x \in \Omega \qquad \text{y} \qquad \lambda_1\big(Sg(f)_x\big) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^p \setminus \Omega$$

Por tanto, usando la primera igualdad de $(6)$ obtenemos la conclusión deseada:

$$\lambda_{p+1}\big(Sg(f)\big) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_1\big(Sg(f)_x\big)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

En la definición de la subgráfica de una función, hemos usado dos desigualdades estrictas, pero el resultado anterior se mantiene, usando en $(8)$ una o dos desigualdades no estrictas. Ello es consecuencia del siguiente resultado, que nos proporciona abundantes ejemplos de conjuntos de medida nula en $\mathbb{R}^N$ con $N > 1$.

- *Si $\Omega$ es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^p$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible, entonces la gráfica de $f$ es un conjunto de medida nula en $\mathbb{R}^{p+1}$, es decir: $\lambda_{p+1}\big(Gr(f)\big) = 0$.*

Igual que en el resultado anterior, la función $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\psi(x,y) = f(x) - y$ para todo $(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}$, es medible. Por tanto, el conjunto $Gr(f) = \psi^{-1}\big(\{0\}\big)$ es medible. Para calcular su medida usamos de nuevo $(6)$, teniendo en cuenta que $Gr(f)_x = \{f(x)\}$ para todo $x \in \Omega$, y $Gr(f)_x = \emptyset$ si $x \in \mathbb{R}^p \setminus \Omega$. Por tanto, $\lambda_1\big(Gr(f)_x\big) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^p$, y la primera igualdad de $(6)$ nos dice que $\lambda_{p+1}\big(Gr(f)\big) = 0$. $\blacksquare$

Conviene por último mencionar otro resultado de naturaleza geométrica, que se usa para calcular áreas y volúmenes, aunque en casos muy particulares.

- *Dado un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones medibles, verificando que $g(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in \Omega$. Entonces el conjunto*

  $$E = \big\{ (x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} \,:\, g(x) \leqslant y \leqslant f(x) \big\} \subset \mathbb{R}^{p+1}$$

  *es medible con $\lambda_{p+1}(E) = \displaystyle\int_\Omega \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$.*

Como en casos anteriores, escribimos $\phi(x,y) = g(x) - y$, así como $\psi(x,y) = f(x) - y$, para todo $(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}$, obteniendo dos funciones medibles $\phi, \psi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vemos entonces que el conjunto $E = \phi^{-1}(\mathbb{R}_0^-) \bigcap \psi^{-1}(\mathbb{R}_0^+)$ es medible.

La medida de $E$ se calcula una vez más usando $(6)$. Ahora tenemos

$$E_x = \big[g(x)\,,\, f(x)\big] \quad \forall x \in \Omega \qquad \text{y} \qquad E_x = \emptyset \quad \forall x \in \mathbb{R}^p \setminus \Omega$$

luego la primera igualdad de $(6)$ nos dice que

$$\lambda_{p+1}(E) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_1(E_x)\,dx = \int_\Omega \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

Nótese que aquí tenemos la integral de una función medible positiva, que puede ser $\infty$. $\blacksquare$

## 13.5. Cálculo de áreas planas e integrales dobles

En el caso $p = q = 1$, está claro que los resultados anteriores permiten calcular el área de numerosos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ mediante una integral simple. Por poner un ejemplo sencillo, el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x, \ 0 < y < 1/x^2\}$ es la subgráfica de la función $x \mapsto 1/x^2$, de $]1, +\infty[$ en $\mathbb{R}^+$. Por tanto, se tiene

$$\lambda_2(A) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1$$

De forma análoga, el conjunto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x, \ 0 \leqslant y \leqslant 1/x\}$ verifica que

$$\lambda_2(B) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \infty$$

Conviene resaltar que los resultados que estamos usando, referentes a la subgráfica de una función, no son más que casos muy particulares del teorema de Tonelli, en su versión para funciones características, y ese es el resultado general que nunca conviene olvidar. En el caso actual, $p = q = 1$, afirma que, para *cualquier* conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^2$, se tiene

$$\lambda_2(E) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(E_x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(E_y)\, dy$$

Esta doble igualdad que, hablando informalmente, nos da el área de un conjunto como integral de la longitud de sus secciones verticales u horizontales, se conoce como *principio de Cavalieri*, en alusión al método que el geómetra italiano B. Cavalieri (1598-1647) usaba para calcular áreas y volúmenes, antes del nacimiento del cálculo integral.

Como otro ejemplo ilustrativo, usemos este principio para calcular el área encerrada por una elipse, o en concreto, el área del conjunto

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$$

con $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Observamos que $E$ es un conjunto compacto, luego medible. Además, dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que $(x,y) \in E$ si, y sólo si, $|x| \leqslant a$ y $|y| \leqslant |b/a| \sqrt{a^2 - x^2}$. Por tanto, para $x \in \mathbb{R}$ vemos que $E_x = \emptyset$ si $|x| > a$ mientras que

$$E_x = \left[-(b/a)\sqrt{a^2 - x^2}\,,\, (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}\right] \qquad \forall x \in [-a, a]$$

Se tiene por tanto que

$$\lambda_2(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_1(E_x) = \int_{-a}^{a} 2\,(b/a)\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Usamos ahora el cambio de variable $x = a \operatorname{sen} t$ con $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ para obtener:

$$\lambda_2(E) = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 2ab \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi ab$$

Pasamos ahora a comentar algunas cuestiones sobre el cálculo de integrales dobles, junto con algunos ejemplos. Dado un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y una función $f \in \mathcal{L}^+(\Omega)$, podemos como ya se ha dicho, extender $f$ definiendo

$$F(x,y) = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega \qquad \text{y} \qquad F(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$$

Obtenemos una función $F \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^2)$, cuya integral en $\mathbb{R}^2$, que coincide con la de $f$ en $\Omega$, se puede calcular usando el teorema de Tonelli. Para una función medible $f : \Omega \to \mathbb{R}$, hacemos la misma extensión, y tenemos que $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ si, y sólo si, $F \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$, lo que permite usar el teorema de Tonelli como criterio de integrabilidad. Finalmente, cuando $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, su integral coincide con la de $F$ en $\mathbb{R}^2$, que se puede calcular usando el teorema de Fubini.

En la práctica, olvidamos la función $F$ y simplemente pensamos que se tiene $f(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, algo que en realidad no vamos a usar. De hecho, tenemos $f = \chi_\Omega f$, y esto hace que las integrales iteradas de $f$ sólo involucren sus valores en $\Omega$. Para una de ellas, fijado $x \in \mathbb{R}$, tenemos $f_x = \big(\chi_\Omega\big)_x f_x = \chi_{\Omega_x} f_x$, y esta función es idénticamente nula, salvo que se tenga $\Omega_x \neq \emptyset$. Esto ocurre precisamente cuando $x \in \pi_1(\Omega)$ donde $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la proyección en la primera coordenada. Además, si $\Omega_x \neq \emptyset$, y $f_x$ es medible positiva o integrable, su integral sobre $\mathbb{R}$ coincide con la integral sobre $\Omega_x$, que sólo depende de los valores de $f$ en $\Omega$. Es frecuente que $f$ venga definida por una expresión que no sólo tenga sentido en $\Omega$, sino también en puntos de $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, o incluso en todo $\mathbb{R}^2$. Para evitar errores, es muy importante tener en cuenta que, en $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ debemos olvidarnos de esa expresión y recordar que $f$ se anula.

En vez de explicar en general las ideas anteriores, preferimos presentar algunos ejemplos ilustrativos. Consideremos el conjunto $\Omega$ y la función $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$\Omega = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < x < 1,\ 0 < y < 1/x \big\} \quad \text{y} \quad f(x,y) = x e^{-xy} \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

Para calcular la integral de $f$ sobre $\Omega$, pensamos que $f(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$. Observamos que $\Omega_x = \emptyset$ para $x \in \mathbb{R} \setminus ]0,1[$, mientras que $\Omega_x = ]0, 1/x[$ para $x \in ]0,1[$. Análogamente, vemos que $\Omega^y = \emptyset$ para $y \in \mathbb{R}_0^-$, mientras que $\Omega^y = ]0,1[$ para $y \in ]0,1[$, pero $\Omega^y = ]0, 1/y[$ para $y \in [1, +\infty[$. Por tanto, las integrales iteradas de $f$ vienen dadas por

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1/x} x e^{-xy}\, dy \right) dx \quad \text{y} \quad \int_0^1 \left( \int_0^1 x e^{-xy}\, dx \right) dy + \int_1^{+\infty} \left( \int_0^{1/y} x e^{-xy}\, dx \right) dy$$

He aquí la ventaja de disponer de las dos integrales iteradas: a simple vista, es más fácil calcular la primera. De hecho, para $x \in ]0,1[$ tenemos

$$\int_0^{1/x} x e^{-xy}\, dy = \big[ -e^{-xy} \big]_0^{1/x} = 1 - \frac{1}{e}$$

y el teorema de Tonelli nos dice que

$$\int_\Omega x e^{-xy}\, d(x,y) = \int_0^1 \left( \int_0^{1/x} x e^{-xy}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{e} \right) dx = 1 - \frac{1}{e}$$

Como ha ocurrido en este ejemplo, al calcular integrales dobles suelen aparecer integrales simples sobre intervalos variables. La situación es más sencilla cuando $\Omega = J$ es un intervalo, no necesariamente acotado. Sin perder generalidad podemos tomar:

$$J = ]\alpha, \beta[ \times ]\gamma, \delta[ \quad \text{con} \quad -\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty \quad \text{y} \quad -\infty \leqslant \gamma < \delta \leqslant +\infty$$

Para $f \in \mathcal{L}^+(J)$, o bien, $f \in \mathcal{L}_1(J)$, las integrales iteradas de $f$ vienen entonces dadas por

$$\int_\alpha^\beta \left( \int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy \right) dx \qquad \text{y} \qquad \int_\gamma^\delta \left( \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx \right) dy$$

donde sólo aparecen integrales simples con límites de integración fijos. Esto es lo que ocurre en nuestro siguiente ejemplo, que será interesante por otros motivos. Tomamos:

$$J = ]0,1[\times]0,1[ \qquad \text{y} \qquad g(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad \forall (x,y) \in J$$

Aunque de momento no sabemos si $g$ es integrable en $J$, vamos a calcular sus integrales iteradas. Fijado $y \in ]0,1[$, se tiene claramente que

$$\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,dx = \left[ \frac{x}{x^2+y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{1+y^2}$$

Obtenemos ya fácilmente una integral iterada:

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 g(x,y)\,dx \right) dy = \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4}$$

Como $g(y,x) = -g(x,y)$ para todo $(x,y) \in J$, intercambiando las variables obtenemos

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 g(x,y)\,dy \right) dx = -\frac{\pi}{4}$$

Como las integrales iteradas de $g$ no coinciden, el teorema de Fubini nos dice que $g \notin \mathcal{L}_1(J)$.

El ejemplo anterior muestra que el teorema de Fubini puede servir para probar que una función no es integrable. Si una de sus dos integrales iteradas no existe, o ambas existen pero no coinciden, la función no puede ser integrable.

## 13.6. Cálculo de volúmenes e integrales triples

Trabajando en $\mathbb{R}^3$, los resultados anteriores permiten calcular el volumen de muy diversos conjuntos. En lo que sigue, conviene tener presente que cualquier intercambio de coordenadas es una isometría de $\mathbb{R}^3$ sobre sí mismo, que preserva el volumen. Por tanto en toda la discusión, los papeles de las tres variables que solemos usar en $\mathbb{R}^3$ son siempre intercambiables. Además, tendremos notaciones diferentes, según tomemos $p = 2$ y $q = 1$ o viceversa, aunque esto no afecta para nada a los resultados.

Lo más acorde con la forma en que habitualmente interpretamos las coordenadas en $\mathbb{R}^3$, es tomar $p = 2$ y $q = 1$, que es lo que haremos a partir de ahora. Ello se debe a que, para un conjunto $E \subset \mathbb{R}^3$, su sección vertical en un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ viene dada por

$$E_{(x,y)} = \left\{ z \in \mathbb{R} : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

que podemos visualizar en $\mathbb{R}^3$ como la intersección con $E$ de la recta *vertical* $\{(x,y)\} \times \mathbb{R}$.

Del mismo modo, la sección horizontal en un punto $z \in \mathbb{R}$ viene dada por

$$E^z = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in E \}$$

que visualizamos como la intersección con $E$ del plano *horizontal* $\mathbb{R}^2 \times \{z\}$.

Cuando $E \in \mathcal{M}_3$, en virtud de $(6)$ tendremos

$$\lambda_3(E) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(E_z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda\big(E_{(x,y)}\big)\, d(x,y)$$

La primera igualdad es la versión del principio de Cavalieri para calcular volúmenes: el volumen de un sólido se obtiene integrando el área de sus secciones. Frecuentemente, el área de dichas secciones es conocida, con lo que esta expresión del volumen es la más sencilla, al usar una integral simple, en vez de la integral doble de la otra expresión.

Calculemos por ejemplo el volumen encerrado por un elipsoide, o más concretamente, el volumen del conjunto abierto

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1 \right\}$$

Fijado $z \in \mathbb{R}$ con $-c < z < c$, tenemos claramente

$$E^z = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < \frac{c^2 - z^2}{c^2} \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} < 1 \right\}$$

donde hemos tomado $u = (a/c)\sqrt{c^2 - z^2}$ y $v = (b/c)\sqrt{c^2 - z^2}$. Vemos que $E^z$ es la región rodeada por una elipse, cuya área conocemos bien:

$$\lambda_2\big(E^z\big) = \pi\, u\, v = \pi\, \big(ab/c^2\big)\, \big(c^2 - z^2\big)$$

Como $E^z = \emptyset$ cuando $|z| > c$, concluimos que

$$\lambda_3(E) = \pi\, \frac{ab}{c^2} \int_{-c}^{c} \big(c^2 - z^2\big)\, dz = \pi\, \frac{ab}{c^2} \left[ c^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-c}^{c} = \frac{4}{3}\, \pi\, a\, b\, c$$

Con respecto al cálculo de integrales de funciones de tres variables, o *integrales triples*, la cuestión más destacable es que su estudio requiere usar dos veces consecutivamente el teorema de Tonelli, o en su caso el de Fubini. De forma resumida, para $f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^3)$, o bien $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^3)$, dichos teoremas nos dicen, por ejemplo, que

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x,y,z)\, dz \right) d(x,y)$$

y en particular, la primera integral $(x,y) \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,y,z)\, dz$ es una función medible positiva, o bien integrable, según el caso. Esto permite usar de nuevo el mismo teorema para obtener que

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right] dx$$

Así pues, la integral de $f$ puede calcularse mediante una integral iterada, que ahora requiere integrar consecutivamente en las tres variables. Obsérvese que $f$ tiene *seis* integrales iteradas, todas las cuales coinciden con la integral triple.

Ni que decir tiene, para $\Omega \in \mathcal{M}_3$ y una función $f \in \mathcal{L}^+(\Omega)$, o bien $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, podemos usar lo anterior, tomando $f(x,y,z) = 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$.

Como ejemplo ilustrativo tomemos $\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x,y \in [0\,,1]\,, \;\; 0 \leqslant y+z \right\}$ y la función continua $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^2} \qquad \forall\,(x,y,z) \in \Omega$$

Vemos claramente que $E_{(x,y)} = \emptyset$ salvo que $x,y \in [0\,,1]$, en cuyo caso, $E_{(x,y)} = [-y\,,+\infty[$.

Para $x,y \in [0\,,1]$ tenemos claramente

$$\int_{-y}^{+\infty} \frac{dz}{(1+x+y+z)^2} = \left[ -\frac{1}{1+x+y+z} \right]_{-y}^{+\infty} = \frac{1}{1+x}$$

de donde deducimos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{d(x,y,z)}{(1+x+y+z)^2} &= \int_0^1 \left[ \int_0^1 \left( \int_{-y}^{+\infty} \frac{dz}{(1+x+y+z)^2} \right) dx \right] dy \\
&= \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \right) dy = \int_0^1 \log 2 \, dy = \log 2
\end{aligned}$$