Análisis Matemático II

Tema 13: Ejercicios propuestos

1. Probar que el conjunto

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le x \le \text{mín}\{ e^y , 1 , e^{1-y} \} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

es medible y calcular su área.

2. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función f es integrable en Ω y calcular su integral.

a) $\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le x \le 2 \,, \;\; y^2 \le 2x \right\},$
$f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \quad \forall (x,y) \in \Omega$

b) $\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \le 1 \,, \;\; x^2 + y^2 \le 2\,x \right\},$
$f(x,y) = x \quad \forall (x,y) \in \Omega$

c) $\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 < x < y < z \right\},$
$f(x,y) = e^{-(x+y+z)} \quad \forall (x,y,z) \in \Omega$

3. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la integrabilidad de la función f en el conjunto Ω.

a) $\Omega =]\,0\,,\,\pi/2\,[\times \mathbb{R}^+, \;\; f(x,y) = \dfrac{\cos(x\,y)}{\left(1 + y^2\right)\sqrt{\operatorname{sen} x}} \quad \forall (x,y) \in \Omega$

b) $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad f(x,y) = \left(x - y\right) e^{-(x-y)^2} \quad \forall (x,y) \in \Omega$

c) $\Omega = \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \dfrac{\cos x + \cos y + \cos z}{\left(1 + x^2 + y^2 + z^2\right)^3} \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

4. Probar que el conjunto

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \left(\mathbb{R}_0^+\right)^3 \;:\; x + y + z \le 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

es medible y calcular su volumen.