Análisis Matemático II

Tema 14: Ejercicios propuestos

1. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función f es integrable en el conjunto A y calcular su integral:

a) $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 > 1 \, , \quad y > 0 \right\}$

$f(x,y) = \dfrac{x + y}{\left(x^2 + y^2 \right)^{\alpha}} \qquad \forall \, (x,y) \in A \qquad (\alpha \in \mathbb{R} \, , \quad \alpha > 3/2)$

b) $A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 < x^2 + y^2 < 1 \, , \quad z > 1 \right\}$

$f(x,y,z) = z^{\alpha} \left(x^2 + y^2 \right)^{\beta} \quad \forall \, (x,y,z) \in A \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R} \, , \quad \alpha < -1 < \beta)$

c) $A = \left\{ (x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 > 1 \right\}$

$f(x,y,z) = \dfrac{x\, y\, z}{\left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^4} \qquad \forall \, (x,y,z) \in A$

2. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la integrabilidad de la función f en el conjunto A:

a) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \, , \qquad f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} x \ \operatorname{sen} y}{\left(x^2 + y^2 \right)^{3/2}} \quad \forall \, (x,y) \in A$

b) $A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z > x^2 + y^2 \right\}$

$f(x,y,z) = \left(x^3 + y^3 \right) \cos (x\, y) \, e^{-z} \qquad \forall \, (x,y,z) \in A$

c) $A = \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \dfrac{1}{\left(1 + x^2 + y^2 + z^2 \right)^{\alpha}} \quad \forall \, (x,y,z) \in A \quad (\alpha \in \mathbb{R}^+)$

3. Calcular el volumen de la llamada *bóveda de Viviani*:

$$B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (2x - 1)^2 + 4\, y^2 \leq 1 \, , \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \, , \quad z \geq 0 \right\}$$