Tema 7

Divergencia de sucesiones

Nuestro próximo objetivo es prestar atención a ciertas sucesiones no acotadas de números reales, que llamaremos "sucesiones divergentes". Estudiaremos su relación con los otros tipos de sucesiones que han aparecido hasta ahora: convergentes, acotadas y monótonas. También adaptaremos las reglas sobre cálculo de límites, para poder manejar sucesiones divergentes.

7.1. Sucesiones divergentes

Hasta ahora, el estudio de las sucesiones de números reales se ha reducido prácticamente a considerar sucesiones acotadas, que ciertamente son las más útiles. Sin embargo, hay preguntas sobre sucesiones acotadas, o incluso sobre sucesiones convergentes, que no tienen aún respuesta satisfactoria, precisamente porque no hemos prestado más atención a las sucesiones no acotadas.

Para ver una pregunta sencilla del tipo indicado, recordemos que si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales no nulos tal que $\{x_n\} \to 0$, entonces la sucesión $\{y_n\} = \{1/x_n\}$ no está acotada, pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo, tomemos

$$x_n = \frac{1}{n+(-1)^n n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{con lo que} \quad y_n = n+(-1)^n n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

Claramente la sucesión $\{y_n\}$ no está acotada, ya que $\{y_{2n}\} = \{4n+1\}$, pero $\{x_n\}$ no converge a cero, ya que $x_{2n-1} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es razonable por tanto preguntarse qué condición necesaria y suficiente debe cumplir $\{y_n\}$ para poder asegurar que $\{x_n\} \to 0$. Esta pregunta encontrará respuesta satisfactoria con el estudio de las sucesiones divergentes que ahora vamos a iniciar.

Tomemos como guía la sucesión $\{n\}$ de los números naturales, la sucesión $\{-n\}$ de sus opuestos y la sucesión alternante $\{(-1)^n n\}$. Las tres son sucesiones no acotadas, pero muestran comportamientos especiales que ahora vamos a catalogar.

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ *diverge positivamente*, cuando para cada $K \in \mathbb{R}$ se puede encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tenga $x_n > K$. Decimos también que $\{x_n\}$ *tiende a* $+\infty$ y escribimos $\{x_n\} \to +\infty$. Simbólicamente:

$$\{x_n\} \to +\infty \iff \big[\, \forall K \in \mathbb{R} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \; : \; n \geqslant m \;\Rightarrow x_n > K \,\big]$$

Equivalentemente, $\{x_n\} \to +\infty$ cuando, para todo $K \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant K\}$ es finito.

Análogamente, decimos que $\{x_n\}$ *diverge negativamente*, o que *tiende a* $-\infty$, y escribimos $\{x_n\} \to -\infty$, cuando para cada $K \in \mathbb{R}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tiene $x_n < K$:

$$\{x_n\} \to -\infty \iff \big[\, \forall K \in \mathbb{R} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \; : \; n \geqslant m \;\Rightarrow x_n < K \,\big]$$

Equivalentemente, $\{x_n\} \to -\infty$ cuando, para todo $K \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geqslant K\}$ es finito.

Por ejemplo, es evidente que $\{n\} \to +\infty$ mientras que $\{-n\} \to -\infty$. De hecho, para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de números reales, es claro que $\{x_n\} \to -\infty$ si, y sólo si, $\{-x_n\} \to +\infty$.

Decimos finalmente que una sucesión $\{x_n\}$ es *divergente* cuando la sucesión $\{|x_n|\}$ diverge positivamente. Es claro que si $\{x_n\} \to +\infty$ o $\{x_n\} \to -\infty$, entonces $\{x_n\}$ es divergente, pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo la sucesión $\{x_n\} = \{(-1)^n n\}$ es divergente, puesto que $\{|x_n|\} = \{n\}$, pero $\{x_n\}$ no diverge positivamente, porque el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant 0\}$ es infinito, y tampoco diverge negativamente, porque $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geqslant 0\}$ también es infinito.

Merece la pena hacer un par de observaciones sobre las nociones recién introducidas, para aclarar su significado y evitar malentendidos. En primer lugar, conviene insistir en que $+\infty$ y $-\infty$ son meros símbolos. Cuando escribimos $\{x_n\} \to +\infty$ no estamos diciendo que la sucesión $\{x_n\}$ sea convergente (nada más lejos de la realidad) ni que $\{x_n\}$ tenga límite $+\infty$. La noción de sucesión convergente y el concepto de límite no han cambiado, ni deben cambiar. Por tanto, expresiones que a veces se usan, como decir que $\{x_n\}$ converge a $+\infty$, o notaciones que a veces también se usan, como $\lim \{x_n\} = +\infty$, pueden crear confusión y deben evitarse, pues no aportan ninguna utilidad o comodidad. En segundo lugar, debe quedar claro que, para una sucesión de números reales, ser divergente no es lo contrario de ser convergente. Cierto que una sucesión divergente no es convergente, pero hay sucesiones que no son convergentes ni divergentes, como $\{(-1)^n\}$, sin ir más lejos.

7.2. Relación con otros tipos de sucesiones

Vamos ahora a discutir brevemente la relación entre las sucesiones divergentes y otros tipos de sucesiones manejadas anteriormente. Conviene empezar observando lo que ocurre con las sucesiones parciales de sucesiones divergentes:

- *Sea $\{x_{\sigma(n)}\}$ una sucesión parcial de una sucesión de números reales $\{x_n\}$. Entonces:*

  (i) $\{x_n\} \to +\infty \implies \{x_{\sigma(n)}\} \to +\infty$
  (ii) $\{x_n\} \to -\infty \implies \{x_{\sigma(n)}\} \to -\infty$
  (iii) *Si $\{x_n\}$ es divergente, lo mismo le ocurre a $\{x_{\sigma(n)}\}$*

La comprobación de estos hechos es bastante inmediata. Si $\{x_n\} \to +\infty$, para todo $K \in \mathbb{R}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ es $x_n > K$. Entonces, también para $n \geqslant m$, por ser $\sigma(n) \geqslant n \geqslant m$, tenemos $x_{\sigma(n)} > K$. Para obtener (ii) basta aplicar (i) a la sucesión $\{-x_n\}$. Finalmente, si $\{x_n\}$ es divergente, tenemos $\{|x_n|\} \to +\infty$ luego $\{|x_{\sigma(n)}|\} \to +\infty$ y $\{x_{\sigma(n)}\}$ también es divergente. ■

Como consecuencia de lo anterior, usando el Teorema de Bolzano-Weierstrass, obtenemos una caracterización de las sucesiones divergentes que explica por qué las llamamos así:

- *Para una sucesión $\{x_n\}$ de números reales, son equivalentes:*
  (i) $\{x_n\}$ *no es divergente*
  (ii) $\{x_n\}$ *admite una sucesión parcial acotada*
  (iii) $\{x_n\}$ *admite una sucesión parcial convergente*

$(i) \Rightarrow (ii)$. Si $\{x_n\}$ no es divergente, sabemos que $\{|x_n|\}$ no tiende a $+\infty$, luego existe $K \in \mathbb{R}$ tal que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : |x_n| \leqslant K\}$ es infinito. Por tanto existe una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to A$, con lo que $\{y_n\} = \{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$ que está acotada, ya que $|y_n| \leqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Si $\{y_n\} = \{x_{\sigma(n)}\}$ está acotada, el Teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice que $\{y_n\}$ admite a su vez una sucesión parcial $\{z_n\} = \{y_{\tau(n)}\}$ que es convergente. Pero $\{z_n\}$ también es una sucesión parcial de $\{x_n\}$, ya que $z_n = y_{\tau(n)} = x_{\sigma(\tau(n))} = x_{\sigma\circ\tau(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la aplicación $\sigma \circ \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, por serlo σ y τ.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Hemos visto anteriormente que una sucesión parcial de una sucesión divergente también es divergente. ■

Así pues, una sucesión de números reales es divergente si, y sólo si, no admite ninguna sucesión parcial convergente. Pero completemos la relación entre divergencia y acotación.

Es claro que una sucesión que diverge positivamente está minorada pero no mayorada. El recíproco no es cierto, como muestra la sucesión $\{x_n\}$ dada por

$$x_n = \frac{n}{4}\left[1 + (-1)^n\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Está minorada, ya que $x_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y no está mayorada, porque $x_{2n} = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero no es divergente, pues $x_{2n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogamente, si una sucesión diverge negativamente, está mayorada pero no minorada y tampoco es cierto el recíproco, basta pensar en la sucesión $\{-x_n\}$ donde $\{x_n\}$ se define como antes.

Es claro que una sucesión divergente nunca está acotada, puede estar minorada, como le ocurre a $\{n\}$, mayorada como le ocurre a $\{-n\}$, y puede no estar mayorada ni minorada, como le ocurre a la sucesión $\{(-1)^n n\}$. Completamos la discusión con un ejemplo de una sucesión que no está mayorada, tampoco está minorada, pero no es divergente. Basta considerar la sucesión $\{y_n\}$ definida por $y_{3k-2} = k\,,\ y_{3k-1} = -k\,,\ y_{3k} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Intuitivamente, se trata de la sucesión: $1\,,\,-1\,,\,0\,,\,2\,,\,-2\,,\,0\,,\,3\,,\,-3\,,\,0\ldots$

La situación se clarifica enormemente si consideramos sucesiones monótonas:

- *Toda sucesión creciente y no mayorada diverge positivamente. Toda sucesión decreciente y no minorada diverge negativamente. Por tanto, toda sucesión monótona es convergente o divergente.*

En efecto, si $\{x_n\}$ es creciente y no mayorada, dado $K \in \mathbb{R}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m > K$, pero entonces, para $n \geqslant m$ tenemos $x_n \geqslant x_m > K$, luego $\{x_n\} \to +\infty$. Si $\{x_n\}$ es decreciente y no minorada, entonces $\{-x_n\}$ es creciente y no mayorada, luego $\{-x_n\} \to +\infty$ y $\{x_n\} \to -\infty$. ■

Veamos nuevos ejemplos de sucesiones divergentes. Para $y \in \mathbb{R}$ con $y > 1$, la sucesión $\{y^n\}$ es creciente y no está mayorada, luego $\{y^n\} \to +\infty$. Como consecuencia, para $x \in \mathbb{R}$ con $|x| > 1$, tomando $y = |x|$ deducimos que $\{|x^n|\} = \{y^n\} \to +\infty$, luego $\{x^n\}$ es divergente: cuando $x > 0$ hemos visto que diverge positivamente, pero si $x < -1$ no diverge positivamente y tampoco negativamente.

7.3. Sumas con sucesiones divergentes

En lo que sigue vamos a revisar las reglas de cálculo de límites, involucrando sucesiones divergentes. En primer lugar, anotemos criterios de comparación bastante obvios:

- *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones de números reales y supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geqslant m$, se tiene $x_n \leqslant y_n$. Entonces:*

$$\{x_n\} \to +\infty \implies \{y_n\} \to +\infty \quad ; \quad \{y_n\} \to -\infty \implies \{x_n\} \to -\infty$$

Pensemos en la suma de dos sucesiones convergentes o divergentes. Partimos claro está del hecho conocido de que si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones convergentes, entonces $\{x_n + y_n\}$ es convergente. Se trata de considerar las restantes posibilidades y todo se deducirá de la siguiente observación:

- *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones de números reales.*
  - (i) *Si $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\}$ está minorada, entonces $\{x_n + y_n\} \to +\infty$*
  - (ii) *Si $\{x_n\} \to -\infty$ e $\{y_n\}$ está mayorada, entonces $\{x_n + y_n\} \to -\infty$.*

La comprobación es inmediata. En el caso (i), existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $y_n \geqslant \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, dado $K \in \mathbb{R}$, existirá $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tiene $x_n > K - \alpha$, luego $x_n + y_n > K$. Para (ii) basta aplicar (i) a las sucesiones $\{-x_n\}$ y $\{-y_n\}$. ■

Veamos ya los casos que pueden darse al sumar una sucesión divergente con otra que puede ser convergente o divergente:

(a) *Si $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\}$ es convergente, entonces $\{x_n + y_n\} \to +\infty$,* pues $\{y_n\}$ está minorada.

(b) *Si $\{x_n\} \to -\infty$ e $\{y_n\}$ es convergente, entonces $\{x_n + y_n\} \to -\infty$.*

(c) *Si $\{x_n\}$ es divergente e $\{y_n\}$ es convergente, entonces $\{x_n + y_n\}$ es divergente.* En efecto, basta tener en cuenta que $|x_n + y_n| \geqslant |x_n| - |y_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De $\{|x_n| - |y_n|\} \to +\infty$, por comparación deducimos que $\{|x_n + y_n|\} \to +\infty$.

(d) *Si $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to +\infty$, entonces $\{x_n + y_n\} \to +\infty$,* pues $\{y_n\}$ está minorada.

(e) *Si $\{x_n\} \to -\infty$ e $\{y_n\} \to -\infty$, entonces $\{x_n + y_n\} \to -\infty$.*

Queda una posibilidad que no está contemplada en la discusión anterior: nada hemos dicho sobre lo que ocurre con $\{x_n + y_n\}$ cuando $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to -\infty$. De forma más genérica, la pregunta sería si podemos afirmar algo sobre la suma de dos sucesiones de las que sólo sabemos que son divergentes. Vamos a ver que, en general, nada se puede afirmar, puede ocurrir de todo.

De hecho, *toda* sucesión $\{z_n\}$ se expresa en la forma $\{x_n + y_n\}$ con $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to -\infty$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $x_n = z_n + |z_n| + n$ y, lógicamente, $y_n = z_n - x_n$, con lo que tenemos $x_n \geqslant n$, $y_n = -|z_n| - n \leqslant -n$. Deducimos que $\{x_n\} \to +\infty$ y que $\{y_n\} \to -\infty$, como se quería. En particular, queda claro que toda sucesión se expresa como suma de dos sucesiones divergentes.

En una situación como la anterior, se dice que tenemos una *indeterminación*. En el caso que nos ocupa, decimos que la indeterminación es del *tipo* $[\infty - \infty]$. Esto no es más que una forma de hablar: cuando decimos que tenemos una indeterminación del tipo $[\infty - \infty]$ sólo estamos recordando que no existe (no puede existir) ningún resultado general que nos dé información sobre la suma de una sucesión que diverge positivamente con otra que diverge negativamente. Por supuesto, ello no quiere decir que en cada caso concreto no podamos describir con toda precisión el comportamiento de tal sucesión. De hecho, más adelante estudiaremos métodos bastante generales para evitar, bajo ciertas hipótesis, esta y otras indeterminaciones.

7.4. Productos y cocientes

Para poder discutir lo que ocurre con un producto de sucesiones, al menos una de las cuales es divergente, la observación básica es la siguiente:

- *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones de números reales. Supongamos que $\{x_n\} \to +\infty$ y que existen $\alpha > 0$ y $p \in \mathbb{N}$ tales que para $n \geqslant p$ se tiene $y_n > \alpha$. Entonces $\{x_n y_n\} \to +\infty$*

En efecto, dado $K \in \mathbb{R}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tiene $x_n > K/\alpha$. Entonces, para $n \geqslant \max\{m, p\}$ tenemos $x_n y_n > K$, lo que prueba que $\{x_n y_n\} \to +\infty$. ■

Las hipótesis del resultado anterior parecen muy restrictivas, pero es fácil aplicarlo para obtener interesantes consecuencias:

(a) *Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones divergentes, entonces $\{x_n y_n\}$ también es divergente.* En efecto, basta usar que $\{|x_n|\} \to +\infty$ y que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n| > 1$ para $n \geqslant p$, luego $\{|x_n y_n|\} \to +\infty$. De hecho, aplicando el resultado anterior a $\{x_n\}$ o $\{-x_n\}$, así como a $\{y_n\}$ o $\{-y_n\}$ según convenga, obtenemos lo siguiente: *Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ divergen ambas positivamente o ambas negativamente, entonces $\{x_n y_n\} \to +\infty$, mientras que si una diverge positivamente y otra diverge negativamente, entonces $\{x_n y_n\} \to -\infty$.*

(b) *Si $\{x_n\}$ es divergente e $\{y_n\}$ converge a un número real no nulo, $\{y_n\} \to \lambda \in \mathbb{R}^*$, entonces $\{x_n y_n\}$ es divergente.* En efecto, basta observar que tomando $0 < \alpha < |\lambda|$, existirá $p \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant p$ se tenga $|y_n| > \alpha$. Usando otra vez las sucesiones $\{-x_n\}$ y $\{-y_n\}$ cuando convenga, tenemos: *Si $\{x_n\} \to +\infty$ y $\lambda > 0$ o $\{x_n\} \to -\infty$ y $\lambda < 0$, entonces $\{x_n y_n\} \to +\infty$. Si $\{x_n\} \to +\infty$ y $\lambda < 0$ o $\{x_n\} \to -\infty$ y $\lambda > 0$, entonces $\{x_n y_n\} \to -\infty$.*

Nada hemos dicho aún sobre el producto de una sucesión divergente por una sucesión que converja a cero. Nada se puede afirmar, tenemos aquí la *indeterminación del tipo* $[0\cdot\infty]$.

De nuevo comprobamos que toda sucesión $\{z_n\}$ puede escribirse en la forma $\{x_n y_n\}$, con $\{x_n\}\to+\infty$, $\{y_n\}\to 0$. En efecto, para cada $n\in\mathbb{N}$, basta tomar $x_n = n(|z_n|+1)$ y, lógicamente, $y_n = z_n/x_n$, con lo que se tiene claramente $x_n \geqslant n$, $|y_n|\leqslant 1/n$. Así pues, $\{x_n\}\to+\infty$, $\{y_n\}\to 0$, como queríamos.

Para estudiar el cociente de dos sucesiones convergentes o divergentes, una vez estudiado el producto, sólo queda pensar lo que le ocurre a la sucesión $\{1/y_n\}$, sabiendo que $\{y_n\}$ es una sucesión de números reales no nulos, convergente o divergente. La observación clave es la siguiente, que contesta una pregunta planteada como motivación al principio de este tema.

- *Sea $y_n\in\mathbb{R}^*$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Entonces $\{y_n\}\to 0$ si, y sólo si, $\{1/y_n\}$ es divergente.*

La demostración de ambas implicaciones es inmediata. Si $\{y_n\}\to 0$, dado $K\in\mathbb{R}^+$ podemos encontrar $m\in\mathbb{N}$ de forma que, para $n\geqslant m$, se tenga $|y_n| < 1/K$ y, por tanto, $|1/y_n| > K$, luego $\{|1/y_n|\}\to+\infty$. Recíprocamente, dado $\varepsilon>0$, la divergencia de $\{1/y_n\}$ nos proporciona un $m\in\mathbb{N}$ tal que, para $n\geqslant m$, se tiene $|1/y_n| > 1/\varepsilon$, luego $|y_n|<\varepsilon$. ■

Naturalmente, dadas dos sucesiones convergentes o divergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, con $y_n\neq 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, para obtener información sobre la sucesión cociente $\{x_n/y_n\}$ podemos verla como producto de $\{x_n\}$ con $\{1/y_n\}$. Entonces podemos encontrarnos con la indeterminación $[0\cdot\infty]$. Más concretamente, ello ocurre cuando $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergen a cero, y también cuando ambas son divergentes. Por ello se habla a veces de indeterminaciones del tipo $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$. No se trata en realidad de nuevos tipos de indeterminación, sólo son diferentes aspectos que puede tomar la indeterminación $[0\cdot\infty]$.

Como ejemplo ilustrativo de las reglas sobre convergencia y divergencia que hemos obtenido, estudiemos una sucesión de la forma $\{P(n)/Q(n)\}$ donde P y Q son polinomios con coeficientes reales, de grados respectivos $p,q\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Suponemos que P no es idénticamente nulo y que $Q(n)\neq 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Destacamos los coeficientes principales de P y Q escribiendo

$$P(x) = a x^p + R(x)\,, \qquad Q(x) = b x^q + S(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

donde $a,b\in\mathbb{R}^*$ y R,S son polinomios de grados menores que p y q respectivamente, que pueden ser idénticamente nulos. La observación clave es la siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R(n)}{n^p} = \lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n^q} = 0 \tag{1}$$

Basta comprobar la afirmación sobre R, la referente a S es análoga. Suponemos $p>0$, pues en otro caso R es idénticamente nulo y no hay nada que comprobar. Escribimos

$$\frac{R(n)}{n^p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k\,\frac{1}{n^{p-k}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

donde $a_0,a_1,\ldots,a_{p-1}$ son los coeficientes de R, y basta observar que $\{1/n^{p-k}\}\to 0$, para $k=0,1,\ldots,p-1$, luego $\{R(n)/n^p\}$ es una suma de sucesiones convergentes a cero.

Finalmente podemos escribir

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{n^p}{n^q} \cdot \frac{a + (R(n)/n^p)}{b + (S(n)/n^q)} = \frac{n^p}{n^q} H(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde $H : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se define por esta misma igualdad. En vista de (1) tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} H(n) = a/b$. Hemos evitado así cualquier indeterminación que pudiera haberse presentado y la descripción del comportamiento de la sucesión $\{P(n)/Q(n)\}$ queda como sigue:

- *Si* $p < q$*, se tiene* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)} = 0$
- *Si* $p = q$*, tenemos* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)} = \dfrac{a}{b}$
- *Si* $p > q$*, entonces* $\{P(n)/Q(n)\}$ *es divergente. De hecho diverge positivamente cuando* $a/b > 0$ *y negativamente cuando* $a/b < 0$.

7.5. Ejercicios de revisión

1. Dar un ejemplo de una sucesión que diverja positivamente y no sea creciente.
2. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Probar que A no está mayorado si, y sólo si, existe una sucesión de elementos de A que diverge positivamente.¿Se puede conseguir que dicha sucesión sea creciente?
3. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y $k \in \mathbb{N}$ fijo. Probar que $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{x_{k+n}\} \to +\infty$.
4. Probar que una sucesión $\{x_n\}$ diverge positivamente si, y sólo si, las sucesiones $\{x_{2n-1}\}$ y $\{x_{2n}\}$ divergen positivamente.¿Qué ocurre con los otros tipos de divergencia?
5. Probar que toda sucesión divergente, o bien diverge positivamente, o bien admite una sucesión parcial que diverge negativamente.
6. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales positivos, convergente o divergente. Para $k \in \mathbb{N}$ fijo, estudiar el comportamiento de la sucesión $\left\{\sqrt[k]{x_n}\right\}$.
7. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

   (a) $\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right\}$ (b) $\left\{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-1}\right\}$ (c) $\left\{\dfrac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}\right\}$

8. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.
9. Dados $k \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$, estudiar el comportamiento de la sucesión $\{n^k a^n\}$.
10. Sean P y Q polinomios con coeficientes reales, con $Q(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $x \in \mathbb{R}^*$, estudiar el comportamiento de la sucesión $\{x^n P(n)/Q(n)\}$.