Soluciones periódicas y subarmónicas para el modelo de la perla

Alexander Gutiérrez G.*

Abstract

Establecemos condiciones necesarias para la existencia de soluciones periódicas y subarmónicas de una ecuación diferencial que describe el movimiento de una perla sobre un aro circular que gira sujeto a una velocidad angular constante ω y un forzamiento periódico. Nuestro enfoque implica utilizando métodos de sub y super soluciones y algunas técnicas presentadas por Zanolin-Boscaggin[1] y Ureña[2] .

1 Introducción

El movimiento de una perla sobre un aro circular que gira uniformemente con un eje de rotación vertical es un problema clásico en mecánica cuya ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden es:

$$\theta'' + \sin(\theta) - \frac{\omega}{2}\sin(2\theta) = f(t). \tag{1}$$

Esta ecuación describe el movimiento de una perla bajo la influencia de una velocidad angular constante ω y un término de forzamiento externo T-periódico $f(t)$.

En esta charla, descomponemos el término forzado $f(t)$ en los componentes $\bar{f}$ y $\tilde{f}$, de modo que $f(t) = \bar{f} + \tilde{f}$, donde $\bar{f}$ representa el promedio de un período $\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$ y $\tilde{f}$ pertenece a cualquiera de los espacios $\tilde{C}_T$ o $\tilde{L}^1_T$, definidos como

$$\tilde{C}_T = \{u \in C(\mathbb{R}) : u(t) = u(t+T) \text{ para cada } t \in \mathbb{R} \text{ y } \bar{u} = 0\},$$
$$\tilde{L}^1_T = \{u \in L^1(\mathbb{R}) : u(t) = u(t+T) \text{ para cada } t \in \mathbb{R} \text{ y } \bar{u} = 0\}.$$

Nos centramos específicamente en investigar la existencia de soluciones periódicas y subarmónicas. En el contexto de la ecuación (1), si u es una solución, entonces $u + 2\pi$ también es una solución. Por lo tanto, consideramos que u y

*Universidad Tecnológica de Pereira (UTP), Department of Mathematics, alexguti@utp.edu.co

[1]Subharmonic solutions for nonlinear second order equations in presence of lower and upper solutions, Discrete and continuous dynamical systems, Vol 33, N. 1. 2013

[2]Using closed orbits to bifurcate many periodic solutions for pendulum-type equations, J. Math. Anal. Appl. pp 318-34 302 (2005).

v son dos soluciones geométricamente distintas siempre que $u \neq v + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Además, definimos una solución subarmónica de orden k ($k \geq 2$) para la Ecuación (1) como una solución kT-periódica que no es lT-periódica para cualquier $l = 1, 2, \ldots, k-1$. Dos soluciones subarmónicas, u y v, de orden k pertenecen a la misma clase de periodicidad si $u(t) = v(t + lT)$ para algunos $l = 1, 2, \ldots, k-1$. En caso contrario, decimos que son de diferente periodicidad.

Los resultados principales que se presentaran serán[3]:

- La existencia de soluciones T-periódicas geométricamente diferentes, se implementa con el método de sub y super soluciones no constantes.
- Adaptamos un resultado de Ureña, que impone condiciones sobre f para establecer $2n$ soluciones T-periódicas geométricamente diferentes.
- La existencia de soluciones subarmónicas de orden k con diferente clase de periodicidad, esta basado en el articulo Zanolin-Boscaggin.

[3] Periodic and subharmonic solutions in the motion of a bead on a rotating circular hoop, Nonlinear Analysis: Real World Applications, Volume 81, 2025, 104189